Simetría: algunas aplicaciones en la teoría de ecuaciones

Por

N. Aragonés [*], U. Zavaleta [**], R. Rodríguez [***]

Universidad Nacional de Trujillo

Departamento de Matemática

[*] Departamento de Matemáticas, UNT, e-mail: naragones@chanchan.unitru.edu.pe.

[**] Departamento de Matemáticas, UNT, e-mail: ulices@unitru.edu.pe,

[***] Departamento de Matemáticas, UNT, e-mail: rfrod78@hotmail.com,

Resumen

El estudio de ecuaciones con frecuencia se presenta como una colección “disjunta” de métodos asociados a clases específicas de ecuaciones. Sin embargo una variación del problema tratado puede hacer inviable el uso del método que con éxito se utilizó al solucionar el problema original. Se hacen necesarios planteamientos unificadores que permitan métodos generales de solución de ecuaciones, el uso de simetrías en general ayuda a solucionar o simplificar las ecuaciones y así facilitar su estudio y aplicación práctica.

Palabras clave. simetría, ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales.

Abstract

The study of equations is often presented as a disjoint collection of methods associated with specific classes of equations. However a variation of the problem can make infeasible the use of the method that was successfully used to solve the original problem. A unifying idea that poses a general method of solution of differential equations is required. The idea is the use of the symmetry helps to solve or simplify the equations and thus facilitate their study and practical application.

Key words. symmetry, algebraic equations, differential equations.

1. Introducción

La teoría de ecuaciones constituye una de las ramas más importantes y extensas de la matemática moderna. Una de sus principales características es su vínculo directo con las aplicaciones. Al estudiar un proceso real, el investigador construye una idealización matemática de éste, es decir, su modelo matemático. Con frecuencia este modelo puede expresarse en términos de algún tipo de ecuación (algebraica, funcional, diferencial) [4].

Por lo general, al estudiar técnicas de solución de ecuaciones de diversos tipos, se tiene la sensación de estar tratando con una colección "disjunta" de métodos asociados a clases específicas de ecuaciones. Sinembargo, en algunos casos una variación del problema tratado hace inviable el uso del método que con éxito se utilizó al solucionar el problema original.

Es necesario utilizar una idea unificadora que permita plantear un método más general de búsqueda de soluciones de ecuaciones en general. Esta idea consiste en el uso de la simetría para solucionar o simplificar las ecuaciones y así facilitar su estudio y aplicación práctica [6].

Apesar de que los métodos basados en simetría han demostrado ser un instrumento poderoso en el quehacer de la Matemática ([2],[6]), actualmente aún no forman parte de la cultura general de estudiantes y profesionales involucrados en el quehacer de la Matemática y sus múltiples aplicaciones.

El presente trabajo plantea en lo posible sintetizar los métodos de solución o simplificación y estudio de ecuaciones a partir de la idea de simetría.

2. Materiales y métodos

2.1. Simetría: transformaciones que conservan la forma de la ecuación. Invariantes.

Por *simetría* de una ecuación se entenderá una transformación de ésta que conserva su forma.

1. Con la finalidad de mostrar el uso de simetrías en la solución de ecuaciones consideremos

inicialmente la ecuación algebraica

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0. \tag{1}$$

Es evidente que $x = 0$ no es una de sus soluciones. Aplicando la transformación $x = \frac{\lambda}{\overline{x}}$ a la ecuación dada se obtiene

$$\frac{\lambda^4}{\overline{x}^4} - \frac{\lambda^3}{\overline{x}^3} - 10\frac{\lambda^2}{\overline{x}^2} + 2\frac{\lambda}{\overline{x}} + 4 = 0$$

y multiplicando por $\overline{x}^4$ y dividiendo entre 4 se llega a la ecuación

$$\frac{\lambda^4}{4} - \frac{\lambda^3}{4}\,\overline{x} - \frac{5\lambda^2}{2}\,\overline{x}^2 + \frac{\lambda}{2}\,\overline{x}^3 + \overline{x}^4 = 0.$$

Para que se conserve la forma de la ecuación bajo la transformación propuesta es necesario que $\lambda = -2$. Así, la transformación $x = -\frac{2}{\overline{x}}$ es una simetría de (1).

Defínase la función $z(x) = x - \frac{2}{x}$. Ésta es invariante respecto de la transformación $x = -\frac{2}{\overline{x}}$; en efecto, $z(x) = x - \frac{2}{x} = -\frac{2}{\overline{x}} - \frac{2}{-\frac{2}{\overline{x}}} = \overline{x} - \frac{2}{\overline{x}} = z(\overline{x})$.

Tomemos a z como cambio de variable para la ecuación original, para ello dividamos (1) entre x^2, así

$$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0.$$

Reordenando,

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 10 = 0.$$

Como $z^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 4$, entonces se obtiene la ecuación $z^2 + 4 - z - 10 = 0$, es decir,

$$z^2 - z - 6 = 0.$$

2. Sea el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 61, \\ x^3 + y^3 &= 91. \end{cases}$$

La transformación $\overline{x} = y$, $\overline{y} = x$ es una simetría del sistema. Consideremos las funciones invariantes respecto de esta simetría $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Como $\sigma_1^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ y $\sigma_1^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, entonces $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = x^2 + y^2$ y $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = x^3 + y^3$. Así,

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 & = & 61, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 & = & 91. \end{cases}$$

Como $\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 = 61\sigma_1$, entonces restándole la segunda ecuación del sistema $\sigma_1\sigma_2 = 61\sigma_1 - 91$, de donde $\sigma_1^3 - 3(61\sigma_1 - 91) = 91$. La ecuación $\sigma_1^3 - 183\sigma_1 + 182 = 0$ se reescribe como $\sigma_1^3 - 1 - 183(\sigma_1 - 1) = 0$, por lo que $(\sigma_1 - 1)(\sigma_1 - 13)(\sigma_1 + 14) = 0$. Así $\sigma_1 = 1, \sigma_1 = 13$; $\sigma_1 = -14$ y $\sigma_2 = -30, \sigma_2 = 54$; $\sigma_2 = \frac{135}{2}$ respectivamente; lo que transforma el problema original en tres sistemas de ecuaciones elementales:

$$\begin{cases} x+y & = & 1 \\ xy & = & -30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y & = & 13 \\ xy & = & 54 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y & = & -14 \\ xy & = & \frac{135}{2} \end{cases}$$

2.2. Ecuaciones funcionales

1. Sea la ecuación funcional $2f(x) + 3xf(1-x) = 4$, las funciones $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1 - x$ presentan las propiedades siguientes: $\varphi_1(\varphi_1(x)) = \varphi_1(x)$, $\varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(\varphi_2(x)) = \varphi_1(x)$, es decir, presentan propiedades de grupo [1], lo que es una manifestación de la simetría de la ecuación; así, reemplazando x por $1-x$ se tiene $2f(1-x) + 3(1-x)f(x) = 4$ con lo que llegamos al siguiente sistema

$$\begin{cases} 2f(x) + 3xf(1-x) & = & 4, \\ 3(1-x)f(x) + 2f(1-x) & = & 4; \end{cases}$$

De donde
$$\begin{cases} 4f(x) + 6xf(1-x) & = & 8, \\ 9x(1-x)f(x) + 6xf(1-x) & = & 12x; \end{cases}$$
Por lo que $(9x^2 - 9x + 4)f(x) = 8 - 12x$, finalmente $f(x) = \frac{8-12x}{9x^2-9x+4}$.

2. Sea la ecuación funcional $af(x) + bf(-x) = c(x+1)$, $a \neq b$, las funciones $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$ presentan las propiedades siguientes: $\varphi_1(\varphi_1(x)) = \varphi_1(x)$, $\varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(\varphi_2(x)) = \varphi_1(x)$, es decir, presentan propiedades de grupo, lo que es una manifestación de la simetría de la ecuación; así, reemplazando x por $-x$ se tiene $af(-x) + bf(x) = c(1-x)$ con lo que llegamos al siguiente sistema

$$\begin{cases} af(x)+bf(-x) &= c(x+1),\\ bf(x)+af(-x) &= c(1-x); \end{cases}$$

De donde

$$\begin{cases} a^2f(x)+abf(-x) &= ac(x+1),\\ b^2f(x)+abf(-x) &= bc(1-x); \end{cases}$$

Por lo que $(a^2-b^2)f(x) = cx(a+b)+c(a-b)$, finalmente $f(x) = \frac{c}{a-b}x + \frac{c}{a+b}$.

3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En los textos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias se tratan inicialmente las ecuaciones con variables separables que se integran de forma inmediata, es decir, dada la ecuación diferencial con variables separables

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f(x)g(y)$$

su solución se determina en cuadraturas como

$$\int \frac{d\,y}{g(y)} = \int f(x)\,d\,x.$$

Para otros tipos de ecuaciones los textos, por lo general, dan la sensación de plantear una colección "disjunta" de métodos asociados a clases específicas de ecuaciones, sinembargo la simetría de las ecuaciones y sus invariantes aparecen como una idea unificadora que permite plantear un método general de búsqueda de solución de ecuaciones diferenciales.

La teoría de Lie [5] de análisis simétrico de ecuaciones diferenciales es una teoría completa pero muy compleja como para exponerla en cursos básicos de ecuaciones diferenciales. En lo que sigue se presentará un planteamiento alternativo simplificado de esa teoría [6] buscando las simetrías entre clases básicas de transformaciones.

Consideremos un ejemplo inicial. Sea la ecuación $\frac{dy}{dx} = ay+bx$.

Esta ecuación presenta la siguiente simetría: $\overline{x} = x+\alpha$, $\overline{y} = y-\frac{b}{a}\alpha$; en efecto, como $\frac{dy}{dx} = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}$ se tiene $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = a(\overline{y}+\frac{b}{a}\alpha)+b(\overline{x}-\alpha) = a\overline{y}+b\overline{x}$. Como $z = ay+bx = a(\overline{y}+\frac{b}{a}\alpha)+b(\overline{x}-\alpha) = a\overline{y}+b\overline{x}$, tomemos el invariante $z = ay+bx$ como cambio de variable, de donde $\frac{dz}{dx} = a\frac{dy}{dx}+b$ por lo que $\frac{dz}{dx} = az+b$, que es una ecuación con varables separables.

Ahora, hagamos uso del cambio de escala en la simplificación de ecuaciones diferenciales ordinarias de naturaleza diversa.

3.0.1. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Considérese la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

y la transformación de coordenadas *cambio de escala*: $x = a\,\overline{x}$, $y = b\,\overline{y}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Como

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,\overline{y}} \times \frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}} \times \frac{d\,\overline{x}}{d\,x} = \frac{b}{a}\,\frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}},$$

reemplazando en la ecuación (2) se tiene

$$\frac{b}{a}\,\frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}} = f\left(\frac{b}{a}\,\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right).$$

Para que la ecuación no cambie su forma $b = a$, por lo que

$$x = a\,\overline{x},\; y = a\,\overline{y} \tag{3}$$

es una simetría de la ecuación (2).

Como

$$\frac{y}{x} = \frac{a\,\overline{y}}{a\,\overline{x}} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$$

entonces $z(x,y) = \frac{y}{x}$ es invariante respecto de la simetría (3). Tomando $z = \frac{y}{x}$ como cambio de variable para la ecuación (2) se tiene

$$\frac{d\,y}{d\,x} = z + x\,\frac{d\,z}{d\,x}.$$

Por lo que la ecuación original toma la forma

$$z + x\,\frac{d\,z}{d\,x} = f(z),$$

que es una ecuación con variables separables.

Sea la ecuación nolineal de primer orden:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right). \tag{4}$$

Considérese la transformación $x = \alpha\overline{x} + \beta$, $y = \alpha\overline{y} + \gamma$. Reemplazando en el argumento de f en el término derecho de la ecuación se tiene

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{a_1(\alpha\overline{x} + \beta) + b_1(\alpha\overline{y} + \gamma) + c_1}{a_2(\alpha\overline{x} + \beta) + b_2(\alpha\overline{y} + \gamma) + c_2} = \frac{\alpha(a_1\overline{x} + b_1\overline{y}) + a_1\beta + b_1\gamma + c_1}{\alpha(a_2\overline{x} + b_2\overline{y}) + a_2\beta + b_2\gamma + c_2}.$$

Para que la ecuación no cambie su forma se requiere que

$$a_1\beta + b_1\gamma + c_1 = \alpha c_1$$

y

$$a_2\beta + b_2\gamma + c_2 = \alpha c_2$$

que es un sistema de ecuaciones lineales con β y γ como incógnitas y α como parámetro libre no nulo. Bajo estas condiciones la ecuación planteada no cambia bajo la acción de la transformación dada, además,

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

es un invariante de esta transformación por lo que, se propone el cambio de variable

$$z = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}.$$

De esta igualdad, calculando $\frac{dy}{dx}$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{(b_1a_2 - a_1b_2)x + b_1c_2 - b_2c_1}{(b_2z - b_1)^2}\right]\frac{dz}{dx} - \frac{a_2z - a_1}{b_2z - b_1}.$$

Reemplazando en la ecuación (4)

$$\left[\frac{(b_1a_2 - a_1b_2)x + b_1c_2 - b_2c_1}{(b_2z - b_1)^2}\right]\frac{dz}{dx} = f(z) + \frac{a_2z - a_1}{b_2z - b_1}$$

se obtiene una ecuación con variables separables.

Las ecuación diferencial siguientes pueden transformarse en homogéneas [3].

1. $x^3(y' - x) = y^2$. Determinemos α y β de modo que la ecuación no varíe bajo el cambio de variables $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^\beta y$.

   Como $\frac{dy^*}{dx^*} = a^{\beta-\alpha}\frac{dy}{dx}$, reemplazando en la ecuación se tiene $(x^*)^3\left(a^{-2\alpha-\beta}\frac{dy^*}{dx^*} - a^{-4\alpha}x^*\right) = a^{-2\beta}y^*$, por lo que $-2\alpha - \beta = -4\alpha = -2\beta$, de donde $\beta = 2\alpha$. Así, $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^{2\alpha}y$, entonces $\frac{y^*}{x^{*2}} = \frac{y}{x^2}$. Tomando $z = \frac{y}{x^2}$ como cambio de variable: $y = x^2z$ y $y' = 2xz + x^2z'$. Reemplazando en la ecuación se tiene $x^3(2xz + x^2z' - x) = x^4z^2$, simplificando se obtiene $xz' = z^2 - 2z + 1$ que es una ecuación con variables separables.

2. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Determinemos α y β de modo que la ecuación no varíe bajo el cambio de variables $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^\beta y$.

   Reemplazando en la ecuación se tiene $a^{\beta-\alpha}\frac{dy^*}{dx^*} = a^{2\beta}y^* - 2\frac{a^{-2\alpha}}{x^{*2}}$, por lo que $\beta - \alpha = 2\beta = -2\alpha$, de donde $\beta = -\alpha$. Así, $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^{-\alpha}y$, entonces $x^*y^* = xy$. Tomando $z = xy$ como cambio de variable: $y = \frac{z}{x}$ y $y' = \frac{xz'-z}{x^2}$. Reemplazando en la ecuación se tiene $xz' = z^2 + z - 2$ que es una ecuación con variables separables.

3.0.2. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Considérese la ecuación

$$\frac{d\,y}{d\,x} + p(x)\,y = q(x) \tag{5}$$

y la transformación $x = \overline{x}$, $y = \overline{y} + \psi(\overline{x})$. Así,

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\partial\,y}{\partial\,\overline{y}}\frac{d\,\overline{y}}{d\,x} + \frac{\partial\,y}{\partial\,\overline{x}}\frac{d\,\overline{x}}{d\,x};$$

es decir,

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}} + \frac{d\,\psi}{d\,\overline{x}}.$$

Reemplazando en la ecuación (5)

$$\frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}} + \frac{d\,\psi}{d\,\overline{x}} + p(\overline{x})\,(\overline{y} + \psi(\overline{x})) = q(\overline{x})$$

y reagrupando se tiene:

$$\frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{x}} + p(\overline{x})\,\overline{y} + \left(\frac{d\,\psi}{d\,\overline{x}} + p(\overline{x})\,\psi(\overline{x})\right) = q(\overline{x}).$$

Para que la ecuación no cambie su forma $\frac{d\,\psi}{d\,\overline{x}} + p(\overline{x})\,\psi(\overline{x}) = 0$. Bajo esta condición

$$x = \overline{x},\ y = \overline{y} + \psi(\overline{x}) \tag{6}$$

es una simetría de la ecuación (5).

Calculemos

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{y(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{y'(x)\psi(x) - y(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} = \frac{y'(x)\psi(x) - y(x)(-p(x)\psi(x))}{\psi^2(x)} = \frac{y'(x) + y(x)p(x)}{\psi(x)} = \frac{q(x)}{\psi(x)}.$$

Por lo que

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{y(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{q(x)}{\psi(x)} = \frac{q(\overline{x})}{\psi(\overline{x})} = \frac{d}{d\,\overline{x}}\left(\frac{\overline{y}(\overline{x})}{\psi(\overline{x})}\right)$$

es un invariante.

De este último resultado $\frac{d}{d\,x}\left(\frac{y(x)}{\psi(x)}\right) = \frac{q(x)}{\psi(x)}$ se sigue

$$\frac{y(x)}{\psi(x)} = \int \frac{q(x)}{\psi(x)}\,d\,x + C$$

o

$$y(x) = \left(\int \frac{q(x)}{\psi(x)}\,d\,x + C\right)\psi(x).$$

Como $\frac{d\,\psi}{d\,x} + p(x)\,\psi(x) = 0$ entonces $\psi(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$, por lo que

$$y(x) = \left(\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)\,d\,x + C\right) e^{-\int p(x)\,dx}.$$

La ecuación de Bernoulli $\frac{d\,y}{d\,x} + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0, 1$ de manera elemental puede transformarse en lineal de primer orden.

Consideremos algunos ejemplos:

1. $x^2y' + xy + 1 = 0$. Para $x^* = a^{\alpha}x$, $y^* = a^{\beta}y$, reemplazando en la ecuación, se tiene $a^{\beta+\alpha}x^{*2}\frac{dy^*}{dx^*} + a^{\beta+\alpha}x^*y^* + 1 = 0$, de donde $\beta = -\alpha$. Así, $x^* = a^{\alpha}x$, $y^* = a^{-\alpha}y$, entonces $x^*y^* = xy$. Tomando $z = xy$ como cambio de variable: $y = \frac{z}{x}$ y $y' = \frac{xz'-z}{x^2}$. Reemplazando en la ecuación se tiene $xz' + 1 = 0$ que es una ecuación con variables separables.

2. $xy^2y' = x^2 + y^3$ (Bernoulli). Para $x^* = a^{\alpha}x$, $y^* = a^{\beta}y$, reemplazando en la ecuación, se tiene $a^{3\beta}x^*y^{*2}\frac{dy^*}{dx^*} = a^{2\alpha}x^{*2} + a^{3\beta}y^{*3}$, de donde $3\beta = 2\alpha$. Así, $x^{*2} = a^{2\alpha}x^2$, $y^{*3} = a^{3\beta}y^3$, entonces $\frac{y^{*3}}{x^{*2}} = \frac{y^3}{x^2}$. Tomando $z = \frac{y^3}{x^2}$ como cambio de variable y reemplazando en la ecuación se tiene $xz' = z + 3$ que es una ecuación con variables separables.

3.0.3. Ecuación de Riccati

En los manuales de ecuaciones diferenciales se plantea la solución de la ecuación de Riccati si se conoce alguna solución particular de ella.

1. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$. Para $x^* = a^{\alpha}x$, $y^* = a^{\beta}y$, reemplazando en la ecuación, se tiene $3a^{\beta-\alpha}\frac{dy^*}{dx^*} + a^{2\beta}y^{*2} + 2a^{-2\alpha}x^{*-2} = 0$, de donde $\beta = -\alpha$. Así, $x^* = a^{\alpha}x$, $y^* = a^{-\alpha}y$, entonces $x^*y^* = xy$. Tomando $z = xy$ como cambio de variable: $y = \frac{z}{x}$ y $y' = \frac{xz'-z}{x^2}$. Reemplazando en la ecuación se tiene $3xz' = -z^2 + 3z - 2$ que es una ecuación con variables separables.

3.0.4. Ecuaciones diversas

Considérense algunas ecuaciones diversas y su simplificación mediante el uso de simetrías e invariantes.

1. Sea la ecuación
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = F\left(x, \frac{d y}{d x}\right). \tag{7}$$
Ella presenta la simetría $x = \overline{x}$, $y = \overline{y} + a$ y el invariante $z = \frac{d y}{d x}$. Así, $\frac{d z}{d x} = \frac{d^2 y}{d x^2}$. Reemplazando en la ecuación original se tiene:
$$\frac{d z}{d x} = F\left(x, z\right).$$
De esta manera, la ecuación de segundo orden dada ha sido transformada en una ecuación de primer orden.

2. Sea la ecuación
$$\frac{d^2 y}{d x^2} = F\left(y, \frac{d y}{d x}\right). \tag{8}$$
Ella presenta la simetría $y = \overline{y}$, $x = \overline{x} + a$ y los invariantes y, $z = \frac{d y}{d x}$. Tomando a (y, z) como nuevas variables se tendrá: $\frac{d z}{d x} = \frac{d z}{d y}\frac{d y}{d x} = z\,\frac{d z}{d y}$. Reemplazando en la ecuación original se tiene:
$$z\,\frac{d z}{d y} = F\left(y, z\right).$$
De esta manera, la ecuación de segundo orden dada ha sido transformada en una ecuación de primer orden.

4. Resultados

El método planteado es sencillo y permiten solucionar o simplificar sustancialmente las ecuaciones en estudio.

5. Análisis y discusión

Se expone a la simetría como idea unificadora que permite un método general de búsqueda de soluciones de ecuaciones o su simplificación sustancial. Esta idea consiste en el uso de invariantes para solucionarlas o simplificarlas y así facilitar su estudio y aplicación práctica.

6. Conclusiones y recomendaciones

1. El método es universal, simple y complementa los métodos clásicos sugeridos en los libros texto de ecuaciones algebraicas, funcionales o diferenciales.

2. Es posible resolver o simplificar sustancialmente ciertos problemas que involucren ecuaciones en general, lineales o no, a partir de los invariantes encontrados.

Referencias Bibliográficas

[1] Ya. S. Brodski, A.K. Slipenko, "Ecuaciones Funcionales," Kiev, Escuela Superior, 1983.

[2] L. Cairó, M. Feix, "Similarity and Rescaling," Extracta Mathematicae, Vol. **13**, Núm. 1, 1-19 (1998).

[3] A.F. Filipov, "Compendio de problemas de ecuaciones diferenciales," M. Nauka, 1973.

[4] O.A. Olenik, "El rol de la teoría de ecuaciones diferenciales en la Matemática moderna y sus aplicaciones," Revista Formativa Sorosiana, Nro. 4, 1996.

[5] F. Oliveri, "Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions," Symmetry 2010, 2, 658-706.

[6] M. Pakdemirli, M. Yurusoy, "Similarity transformations for partial differential equations," SIAM REV. Vol. 40, Nro. 1, pp. 96-101, 1998.

Trujillo, Abril del 2019

Prof. Nelson Aragonés S. Prof. Ulices Zavaleta C. Profra. Roxana Rodríguez E.