BASES ORTONORMALES DE WAVELETS DE SOPORTE COMPACTO*

RAÚL SARÁCHAGA VILLANUEVA†, SANTOS ÑIQUE ROMERO‡, AND MARCOS FERRER REYNA§

Resumen. El objetivo principal en este trabajo es construir wavelets ψ de soporte compacto. Para ello tomaremos la función escala φ siendo de soporte compacto. Si:

$$m_0(\xi) = \sum_k C_k e^{i\xi k}$$

donde

$$C_k = \frac{1}{2}\int \varphi(\frac{x}{2})\overline{\varphi(x+k)}dx.$$

La estrategia será que solo un número finito de los coeficientes $C_k^{'}s$ serán no nulos. Luego de

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i5/2}\overline{m_o(\frac{\xi}{2}+\pi)}\hat{\psi}(\xi/2)$$

se deduce que ψ es una combinación lineal finita de funciones de soporte compacto (losφ's).

Palabras claves. b.o.n. wavelets, soporte compacto.

Abstract. The main objective in this work is to construct wavelets of compact support. For this we will take the function scale φ being of compact support. If:

$$m_0(\xi) = \sum_k C_k e^{i\xi k}$$

where

$$C_k = \frac{1}{2}\int \varphi(\frac{x}{2})\overline{\varphi(x+k)}dx.$$

The strategy will be that only a finite number of the coefficients $C_k^{'}s$ will be non-zero. After

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i5/2}\overline{m_o(\frac{\xi}{2}+\pi)}\hat{\psi}(\xi/2)$$

It follows that ψ is a finite linear combination of compact support functions (the φ's).

1. Introducción. Las primeras ideas de construcción de wavelets de soporte compacto fueron dadas en 1909 por Alfred Haar, brillante matemático húngaro, discípulo de David HIlbert.
Este parte de la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & , \quad 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad en\, otra\, parte \end{cases}$$

cuyo soporte en el intervalo $[0,1]$. Siendo j, k enteros positivos, considera $n = 2^j + k$, $n \geq 1$, $j \geq 0$; $0 \leq k \leq 2^j$ y construye la familia de traslaciones y dilataciones

$$h_n \equiv h_{j,k}(x) = 2^{j/2}h(z^j x - k),$$

*Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Trujillo.

†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(rasv92@hotmail.com).
‡Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(siqueromero@hotmail.com).
§Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(ferrer_m2007@hotmail.com).

llegando a la conclusión que la familia $\{h_i(x)\}_{i=0,1,\dots}$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$. Esta forma tiene algunas limitaciones como que si f es una función continua en $[0,1]$, los elementos aproximantes h_n no son funciones continuas. Es importante que los h_n sean también funciones continuas en $[0,1]$.

Aproximadamente 80 años después, Jean Morlat construye las primeras wavelets para el tratamiento de señales, realiza un análisis de estas en diferentes escalas, determinando la diferencia de una escala a otra.
Tal proceso es conocido como Análisis Multiresolución el cual es un proceso de aproximación formalizado por S.Mallat y Meyer.

En 1990 Y. Meyer construye una base ortonormal de $L^2([0,1])$ con una estructura algoritmica simple que contiene todas las funciones $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$; $j \geq 0$; $k \geq 0$ con soportes en $[0,1]$ siendo ψ la wavelet de Daubechies. Partiendo de una función $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la familia

$$\{\varphi_{a,b}\}_{a>0,b}$$

constituye una base para $L^2(\mathbb{R})$, esto es:

$$f(x) = \sum_{a,b} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b}(x).$$

Para construir Wavelets debemos partir de una funcion escala φ así como su Análisis Multiresolución asociado.

En aplicaciones de Ciencias Básicas y Tecnológicas se requiere construir wavelets ortonormales de soporte compacto, lo que permitirá representar funciones vía series con solammente un número finito de coeficientes no nulos, esto es las series son en verdad polinomios trigonométricos.
Fué Ingrid Dauchies [9] quien inicia la construcción de wavelets de soporte compacto, motivada por el trabajo de Mallat para construir wavelets con unn número finito de componentes no nulos (las wavelets de soporte compacto) lo que es importante para la implementación computacional lo que permite analizar señales usando solamente un número finito de operaciones.

2. Análisis y Discusión.

Teorema 2.1. *Existe una constante $C \geq 0$ tal que para cada entero $r \geq 0$ existe un Análisis Multirevolución de $L^2(\mathbb{R})$, con regularidad r, tal que la función de escala φ y la wavelet ψ son de soporte compacto en el intervalo [-Cr,Cr].*

2.1. Resultados Previos.

Lema 2.2. *Sea $m_0(\xi)$ una función $C^\infty(\mathbb{R})$, 2π- periódica, tal que*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1 \quad y \quad m_0(0) = 1$$

Si φ es definida de la forma $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$ entonces $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$.
Prueba. Teniendo en cuenta que $\forall N \geq 1$,

$$I_N \equiv \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\pi_N(\xi)|^2 d\xi = 2\pi$$

donde $\pi_N(\xi) = \prod_{j=1}^{N} m_0(\frac{\xi}{2^j})$.
Ahora:
(a) $\mid \hat{\varphi}(\xi) \mid \leq \mid \pi_N(\xi) \mid \forall \xi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mid m_0(\frac{\xi}{2^{N-1}}) m_0(\frac{\xi}{2^{N+2}}) \mid <1$
(b) $\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\pi_N(\xi)|^2 d\xi = 2\pi$
Luego, si $N \to \infty$, $\|\hat{\varphi}\|_{L^2}^2 = \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq 2\pi$,
entonces $\|\varphi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{\varphi}\|_{L^2}^2 \leq 1$ ■

Lema 2.3. *Sea m_0 un polinomio trigonométrico que verifica:*
- $|m_0(\xi)|^2 + m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \, \forall \xi \in \mathbb{R}$
- $m_0 \in C^\infty$, *2π-periódica.*
- $m_0(0) = 1$

Si $m_0(\xi) \neq 0$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, entonces

$$(\varphi(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

es una sucesión ortonormal.
Prueba. Sea $G(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + Z\pi k)|^2$. Se sabe que $(\varphi(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal $\Leftrightarrow G(\xi) = 1$. Se tiene que $G(\xi) = 1 \forall \xi$ pues se prueba que G es constante y $G(0) = 1$. ■

Lema 2.4. *Sea $G(\xi) = \sum_{-T}^{T} b_k e^{ik\xi}$ un polinomio trigonométrico el cual es no negativo sobre $\mathbb{R}$, entonces existe un polinomio trigonométrico de la forma*

$$m_0(\xi) = \sum_{-T}^{T} a_k e^{ik\xi} \quad tal \quad que \quad |m_0(\xi)|^2 = g(\xi).$$

Lema 2.5. *Dado $r > 0$, existe una suma trigonométrica finita $m_0(\xi)$ verificando la hipótesis del lema 2.3 y tal que φ tiene derivadas acotadas hasta el orden r.*

2.2. Prueba del teorema 2.1. Esta prueba se basa en [9]

El lema 2.5 garantiza la existencia de un polinomio trigonométrico que verifica:
$m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R})$, 2π periódico
$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$
$m_0(0) = 1$ y $m_0(\xi) \neq 0$ sobre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y
$|C_k| \leq (1 + |k|)^M C_M$.
Defina φ según $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^i})$, por lo que φ està bien definida y de soporte compacto. Además por los lemas 2.2 y 2.3, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ y $(\varphi(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal.
Considere $V_0 = \overline{\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}^{L^2(\mathbb{R})}$, donde en general

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k); \; j,k \in \mathbb{Z}$$

Defina ahora $V_j, j \in \mathbb{Z}$ via

$$f(x) \in V_j \quad \Leftrightarrow \quad f(2^{-j}x) \in V_0,$$

esto es,

$$V_j = \overline{\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}}^{L^2(\mathbb{R})}$$

Se prueba así que $\{V_j\}$ es un Análisis Multiresolución de $L^2(\mathbb{R})$. Este análisis Multiresolución garantiza la existencia de wavelets ψ tal que $(\psi(x-k))_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0 y $(\psi_{j,k\in\mathbb{Z}})$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, donde

$$\psi(x) = 2\Sigma_{-N}^{N}\bar{a_k}(-1)^k\varphi(2x-k-1)$$

de soporte compacto.
Además $sop\,\psi \subset [-N+\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}]$.
Se verifica que $\exists\, C \geq 0$ tal que $sop\,\psi \subset [-Cr, Cr]$ donde r es el grado de regularidad del Anàlisis Multiresolución $\{V_j\}$.

Se concluye precisando que ψ es una wavelet de clase C^r, esto es r-regular; que ψ es bien localizada y ψ es una wavelet $(\int x^q\psi(x)dx = 0)$; q$= 0, 1, ..r$.

3. Resultados. Al concluir el presente trabajo se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Si φ es definida siendo $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j})$ se prueba que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$.
2. Dado $r > 0$ se construye una suma trigonométrica finita $m_0(\xi)$ tal que φ tiene r-derivadas acotadas.
3. Se ha probado que existe un Análisis Multiresolución de $L^2(\mathbb{R})$ con regularidad r, donde las funciones de φ (escala) y ψ son de soporte compacto.

4. Conclusiones. Al finalizar el presente trabajo, se infieren las siguientes conclusiones:

1. Se parte de una función $m_0(\xi)$ la cual verifica
$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1\ \forall\xi \in \mathbb{R}$$
y se construye un Análisis Multiresolución donde aparecen las funciones φ y ψ.
2. Para que φ y ψ sean suficientemente regulares, se requiere que el Análisis Multiresolución sea regular con la condición
$$|C_k| \leq \frac{C_M}{(1+|k|)^M}, \forall M \in \mathbb{Z}^+$$
3. Es posible construir wavelets que tienen un número finito de componentes no nulas, el resto son ceros, lo que permite una mejor aplicación tecnológica.

Referencias

[1] Chui, C. K., *An Introduction to wavelets.*, Academic Press, London, 1992.
[2] Chui, C. K.(ed.), *Wavelets: a tutorial in theory and applications.*, Academic Press, London, 1992.
[3] Cohen, A.; Daubechies. I; Feauveau, J. C., *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. in Pure and Appl. Math., 45: 485-560, 1992.
[4] Cohen, A.; Daubechies. I; Vial, P., *Wavelets on the internal and fast wavelet transforms.*, Comput. Harmonic Analysis 1(1): 54-81, 1993.
[5] Combes, J.M; Grossmann, A.; Tchatmitchian,P.(eds.), *Wavelets, time frecuency methods and phase space.*, 1st. International Wavelets Conference, Marseille, December 1987. Inverse Problems and Theoretical Imaging, Springer, 1989.
[6] Daubechies, I.; Grossman, A.; Meyer, Y., *Painless nonorthogonal expansions.*, J. Math. Phys. 27: 1271-1283, 1986.
[7] Daubechies, I., *Time-frecuency localization operators:a geometric phase space aproach.*, IEEE Trans. Inform. Theory. 36: 961-1005. 1990.

[8] Daubechies, I., *Orthonormal bases of compactly supported wavelets.*, Communications in Pure and Applied Mathematics, 41: 909-996, 1988.
[9] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets.*, CBMS-NSF Series in Appl.Math. SIAM Publ.Philadelphia,1992.
[10] Daubechies,I.;Mallat, S.;Willsky,A.(eds)., *Special issue on wavelet transforms and multiresolution signal analysis*, IEEE Trans. Inform.Theory 38,1992.
[11] Gomes,S. M.; Cortina, E., *Convergence estimates for the wavelet-Galerkin method.*, To appear in SIAM Jr. Numer. Anal.
[12] Gomes, S. M., *Wavelet analysis and approximation results.*, preprint 1993.
[13] Grossmann,A. and Morlet, J., *Descomposition of Hardy functions into square integrable wavelets.*, SIAM J.Math. Anal.,15:723-736.1984.
[14] Mallat , S., *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representacion.*, IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.11(7):674-693.1989.
[15] Mallat, S., *Multiresolution approcimations and wavelet orthonormal basis of* $L^2(\mathbb{R})$.,
[16] Meyer, Y., Ondelettes et Operaturs., Hermann, Paris,1990.
[17] Meyer, Y.(ed)., Wavelets and Applications., Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[18] Morlet, J.;Arens, G.;Fourgeau,I. and Giard, D., Wave propagation and sampling theory, Geophysics, 47: 203-236.1982.
[19] Strang, G., Introduction to Applied Mathematics, Wellesley-Cambridge Press. Wellesley,MA, 1986.