Uso de la similitud y cambio de escala para solucionar algunos problemas planteados en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales

Por

N. Aragonés [*], U. Zavaleta [**], R. Rodríguez [***]

Universidad Nacional de Trujillo

Departamento de Matemática

[*] Departamento de Matemáticas, UNT, e-mail: naragones@chanchan.unitru.edu.pe.

[**] Departamento de Matemáticas, UNT, e-mail: ulices@unitru.edu.pe,

[***] Departamento de Matemáticas, UNT, e-mail: rfrod78@hotmail.com,

Resumen

El estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias con frecuencia se presenta como una colección "disjunta" de métodos asociados a clases específicas de ecuaciones. En cursos de matemática avanzada, en donde se tratan ecuaciones en derivadas parciales, surgen nuevamente una multitud de técnicas y soluciones "especiales". Sin embargo una variación del problema tratado puede hacer inviable el uso del método que con éxito se utilizó al solucionar el problema original. Se hacen necesarios planteamientos unificadores que permitan métodos generales de solución de ecuaciones diferenciales, esta idea consiste en el uso de la similitud, en general, y el cambio de escala, en particular, para solucionar o simplificar las ecuaciones y así facilitar su estudio y aplicación práctica.

Palabras clave. similitud, cambio de escala, ecuaciones diferenciales.

Abstract

The study of ordinary differential equations is often presented as a disjoint collection of methods associated with specific classes of equations. In advanced mathematical courses, where partial differential equations are studied, a big number of special techniques for their solution emerge. However a variation of the problem can make infeasible the use of the method that was successfully used to solve the original problem. A unifying idea that poses a general method of solution of differential equations is required. The idea is the use of the similarity and the scaling to solve or simplify the equations and thus facilitate their study and practical application.

Key words. similarity, scaling, differential equations.

1. Introducción

La teoría de ecuaciones diferenciales constituye una de las ramas más importantes y extensas de la matemática moderna. Una de sus principales características es su vínculo directo con las aplicaciones. Al estudiar un proceso real, el investigador construye una idealización matemática de éste, es decir, su modelo matemático. Con frecuencia este modelo puede expresarse en términos de ecuaciones diferenciales [3].

Por lo general, al estudiar técnicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, se tiene la sensación de estar tratando con una colección "disjunta" de métodos asociados a clases específicas de ecuaciones. En cursos avanzados de matemtica en donde se tratan ecuaciones en derivadas parciales, surgen nuevamente una multitud de técnicas y soluciones "especiales". Sinembargo, en algunos casos una variación del problema tratado hace inviable el uso del método que con éxito se utilizó al solucionar el problema original.

Es necesario utilizar una idea unificadora que permita plantear un método más general de búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales. Esta idea consiste en el uso de la similitud y el cámbio de escala para solucionar o simplificar las ecuaciones y así facilitar su estudio y aplicación práctica [5].

Apesar de que los métodos basados en similitud han demostrado ser un instrumento poderoso en el quehacer de la Matemática ([1],[5]), actualmente aún no forman parte de la cultura general de estudiantes y profesionales involucrados en el quehacer de la Matemática y sus múltiples aplicaciones.

El presente trabajo plantea en lo posible sintetizar los métodos de solución o simplificación y estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales a partir de la idea de similitud y de los cambios de escala y así poder comparar con procedimientos de solución usuales.

2. Materiales y métodos

2.1. Similaridad: transformaciones que conservan la forma de la ecuación

Las transformaciones similares son transformaciones que con frecuencia permiten reducir el número de variables de las que depende una expresión, el número de parámetros involucrados en un proceso o el orden de las ecuaciones que modelan un fenómeno . En resumen, permiten simplificar ciertas ecuaciones ([1],[5],[6]). La teoría de Lie [4] de análisis simétrico de ecuaciones diferenciales trata estos problemas, es una teoría completa pero muy compleja como para exponerla en cursos básicos de ecuaciones diferenciales. En lo que sigue se presentará un planteamiento alternativo simplificado en base a similaridad.

Por ejemplo ([7]) para el problema

$$\frac{d^2x^*}{d\,t^{*2}} = -\frac{g^*R^{*2}}{(x^*+R^*)^2}, \qquad x^*(0)=0, \qquad \frac{d\,x^*(0)}{d\,t^*} = V^*$$

consideremos las transformaciones similares (cambio de escala) siguientes:

$$t^* = a^{\alpha}t, \quad x^* = a^{\beta}x, \quad g^* = a^{\lambda_1}g, \quad R^* = a^{\lambda_2}R, \quad V^* = a^{\lambda_3}V.$$

Como $\frac{d^2x^*}{d\,t^{*2}} = a^{\beta-2\alpha}\frac{d^2x}{d\,t^2}$, entonces reemplazando en el problema se tiene

$$a^{\beta-2\alpha}\frac{d^2x}{d\,t^2} = -\frac{a^{\lambda_1+2\lambda_2}gR^2}{(a^{\beta}x+a^{\lambda_2}R)^2}, \qquad x(0)=0, \qquad a^{\beta-\alpha}\frac{d\,x(0)}{d\,t} = a^{\lambda_3}V,$$

de donde, para mantener la forma del problema invariante, se tienen las ecuaciones:

$$\beta = \lambda_2, \qquad \beta-2\alpha = \lambda_1, \qquad \beta-\alpha = \lambda_3.$$

Estas ecuaciones sugieren, por ejemplo, las siguientes expresiones invariantes:

1. $\beta = \lambda_2$, entonces $x^* = a^{\beta}x = a^{\lambda_2}x$ y $R^* = a^{\lambda_2}R$, por lo que $\frac{x^*}{R^*} = \frac{x}{R}$.

2. $\lambda_2 = \beta = \lambda_1+2\alpha$, entonces $R^* = a^{\lambda_2}R$, $g^* = a^{\lambda_1}g$ y $t^* = a^{\alpha}t$ de donde $g^*t^{*2} = a^{\lambda_1+2\alpha}gt^2 = a^{\lambda_2}gt^2$ por lo que $\frac{g^*t^{*2}}{R^*} = \frac{gt^2}{R}$, es decir $\sqrt{\frac{g^*}{R^*}}t^* = \sqrt{\frac{g}{R}}t$.

3. $\lambda_2 = \beta = \lambda_3 + \alpha$, entonces $R^* = a^{\lambda_2} R$, $V^* = a^{\lambda_3} V$ y $t^* = a^{\alpha} t$ de donde $V^* t^* = a^{\lambda_3+\alpha} V t = a^{\lambda_2} V t$ por lo que $\frac{V^*}{R^*} t^* = \frac{V}{R} t$.

4. $\lambda_1 + 2\alpha = \beta = \lambda_3 + \alpha$, entonces $\lambda_3 - \lambda_1 = \alpha$, así, $V^* = a^{\lambda_3} V$, $g^* = a^{\lambda_1} g$ y $t^* = a^{\alpha} t$ de donde $\frac{V^*}{g^*} = a^{\lambda_3-\lambda_1} \frac{V}{g} = a^{\alpha} \frac{V}{g}$ por lo que $\frac{g^*}{V^*} t^* = \frac{g}{V} t$.

Definamos $\varepsilon = \frac{V^{*2}}{g^* R^*} = \left(\frac{V^*}{\sqrt{g^* R^*}} \right)^2 = \left(\frac{V^*}{v_e} \right)^2$, donde v_e es la primera velocidad cósmica.

Usando las expresiones invariantes para x, $x = \frac{x^*}{R^*}$ y para t, $t = \sqrt{\frac{g^*}{R^*}} t^*$, $t = \frac{V^*}{R^*} t^*$, $\frac{g^*}{V^*} t^*$, se logra transformar el problema a las formas siguientes:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \varepsilon^{1/2},$

2. $\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 1,$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varepsilon}{(1+x)^2}; \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \varepsilon,$

respectivamente. Notemos que tres parámetros V^*, g^*, R^* se reducen a uno, adimensional, ε.

3. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Hagamos uso del cambio de escala en la simplificación de ecuaciones diferenciales ordinarias de naturaleza diversa.

3.0.1. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Las ecuación diferencial siguientes pueden transformarse en homogéneas según [2].

1. $x^3(y' - x) = y^2$. Determinemos α y β de modo que la ecuación no varíe bajo el cambio de variables $x^* = a^{\alpha} x$, $y^* = a^{\beta} y$.

   Como $\frac{dy^*}{dx^*} = a^{\beta-\alpha} \frac{dy}{dx}$, reemplazando en la ecuación se tiene $(x^*)^3 \left(a^{-2\alpha-\beta} \frac{dy^*}{dx^*} - a^{-4\alpha} x^* \right) = a^{-2\beta} y^*$, por lo que $-2\alpha - \beta = -4\alpha = -2\beta$, de donde $\beta = 2\alpha$. Así, $x^* = a^{\alpha} x$, $y^* = a^{2\alpha} y$, entonces $\frac{y^*}{x^{*2}} = \frac{y}{x^2}$. Tomando $z = \frac{y}{x^2}$ como cambio de variable: $y = x^2 z$ y $y' = 2xz + x^2 z'$. Reemplazando en la ecuación se tiene $x^3(2xz + x^2 z' - x) = x^4 z^2$, simplificando se obtiene $xz' = z^2 - 2z + 1$ que es una ecuación con variables separables.

2. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$. Determinemos α y β de modo que la ecuación no varíe bajo el cambio de variables $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^\beta y$.

   Reemplazando en la ecuación se tiene $a^{\beta-\alpha}\frac{dy^*}{dx^*} = a^{2\beta}y^* - 2\frac{a^{-2\alpha}}{x^{*2}}$, por lo que $\beta - \alpha = 2\beta = -2\alpha$, de donde $\beta = -\alpha$. Así, $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^{-\alpha}y$, entonces $x^*y^* = xy$. Tomando $z = xy$ como cambio de variable: $y = \frac{z}{x}$ y $y' = \frac{xz'-z}{x^2}$. Reemplazando en la ecuación se tiene $xz' = z^2 + z - 2$ que es una ecuación con variables separables.

3.0.2. Ecuación diferencial lineal de primer orden

1. $x^2y' + xy + 1 = 0$. Para $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^\beta y$, reemplazando en la ecuación, se tiene $a^{\beta+\alpha}x^{*2}\frac{dy^*}{dx^*} + a^{\beta+\alpha}x^*y^* + 1 = 0$, de donde $\beta = -\alpha$. Así, $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^{-\alpha}y$, entonces $x^*y^* = xy$. Tomando $z = xy$ como cambio de variable: $y = \frac{z}{x}$ y $y' = \frac{xz'-z}{x^2}$. Reemplazando en la ecuación se tiene $xz' + 1 = 0$ que es una ecuación con variables separables.

2. $xy^2y' = x^2 + y^3$ (Bernoulli). Para $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^\beta y$, reemplazando en la ecuación, se tiene $a^{3\beta}x^*y^{*2}\frac{dy^*}{dx^*} = a^{2\alpha}x^{*2} + a^{3\beta}y^{*3}$, de donde $3\beta = 2\alpha$. Así, $x^{*2} = a^{2\alpha}x^2$, $y^{*3} = a^{3\beta}y^3$, entonces $\frac{y^{*3}}{x^{*2}} = \frac{y^3}{x^2}$. Tomando $z = \frac{y^3}{x^2}$ como cambio de variable y reemplazando en la ecuación se tiene $xz' = z + 3$ que es una ecuación con variables separables.

3.0.3. Ecuación de Riccati

En los manuales de ecuaciones diferenciales se plantea la solución de la ecuación de Riccati si se conoce alguna solución particular de ella.

1. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$. Para $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^\beta y$, reemplazando en la ecuación, se tiene $3a^{\beta-\alpha}\frac{dy^*}{dx^*} + a^{2\beta}y^{*2} + 2a^{-2\alpha}x^{*-2} = 0$, de donde $\beta = -\alpha$. Así, $x^* = a^\alpha x$, $y^* = a^{-\alpha}y$, entonces $x^*y^* = xy$. Tomando $z = xy$ como cambio de variable: $y = \frac{z}{x}$ y $y' = \frac{xz'-z}{x^2}$. Reemplazando en la ecuación se tiene $3xz' = -z^2 + 3z - 2$ que es una ecuación con variables separables.

3.1. Ecuación de conducción del calor

Sea la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Considérese la transformación $x = \alpha\overline{x}$, $t = \beta\overline{t}$; para ella se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial \overline{t}}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}.$$

Reemplazando en la ecuación (1) se tiene:

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial \overline{t}} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}.$$

Para que la ecuación no varíe $\alpha = \sqrt{\beta}$. De esta manera $x = \sqrt{\beta}\,\overline{x}$, $t = \beta\overline{t}$, de donde $\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{\overline{x}}{\sqrt{\overline{t}}}$ por lo que $z(x,t) = \frac{x}{\sqrt{t}}$ es invariante.

Como $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d u}{d z}\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{x}{t^{3/2}}\frac{d u}{d z}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t^{1/2}}\frac{d^2 u}{d z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d^2 u}{d z^2}$, reemplazando en la ecuación (1) se tiene

$$\frac{1}{t}\frac{d^2 u}{d z^2} = -\frac{1}{2}\frac{x}{t^{3/2}}\frac{d u}{d z}.$$

Simplificando

$$\frac{d^2 u}{d z^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{t^{1/2}}\frac{d u}{d z} = 0,$$

finalmente se obtiene

$$\frac{d^2 u}{d z^2} + \frac{z}{2}\frac{d u}{d z} = 0,$$

que es una ecuación ordinaria con variables separables.

4. Resultados

El método planteado es sencillo y permiten solucionar o simplificar sustancialmente las ecuaciones en estudio.

5. Análisis y discusión

Se expone una idea unificadora que permite un método general de búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales o su simplificación sustancial. Esta idea consiste en el uso de invariantes para solucionarlas o simplificarlas y así facilitar su estudio y aplicación práctica.

6. Conclusiones y recomendaciones

1. El método es universal, simple y complementa los métodos clásicos sugeridos en los libros texto de ecuaciones diferenciales.

2. Es posible resolver o simplificar sustancialmente problemas que involucren ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, lineales o no, a partir de los invariantes encontrados.

Referencias Bibliográficas

[1] L. Cairó, M. Feix, "Similarity and Rescaling," Extracta Mathematicae, Vol. **13**, Núm. 1, 1-19 (1998).

[2] A.F. Filipov, "Compendio de problemas de ecuaciones diferenciales," M. Nauka, 1973.

[3] O.A. Olenik, "El rol de la teoría de ecuaciones diferenciales en la Matemática moderna y sus aplicaciones," Revista Formativa Sorosiana, Nro. 4, 1996.

[4] F. Oliveri, "Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions," Symmetry 2010, 2, 658-706.

[5] M. Pakdemirli, M. Yurusoy, "Similarity transformations for partial differential equations," SIAM REV. Vol. 40, Nro. 1, pp. 96-101, 1998.

[6] A.A. Samarskii, A.P. Mikhailov, "Modelado Matemático," Moscú, FISMATLIT, 2005.

[7] L.A. Segel, "Simplification and scaling," SIAM REV. Vol. 14, Nro. 4, pp. 547-571, 1972.

Trujillo, Mayo del 2018

Prof. Nelson Aragonés S. Prof. Ulices Zavaleta C. Profra. Roxana Rodríguez E.