UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

## DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS



### INFORME FINAL DEL

### PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

### “ALGUNAS EXTENSIONES Y APLICACIONES DEL TEOREMA DE KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ”

**Codigo: P. I. 39671705111 – Mat – MAT - 2017**

### AUTORES:

### Mg. Guillermo Teodoro Ramírez Lara

* Dr. José Levi Díaz Leiva
* Mg. Rosa Higidia Moreno Pachamango

.

### TRUJILLO, ABRIL 2018

### ALGUNAS EXTENSIONES Y APLICACIONES DEL TEOREMA DE KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ

**RESUMEN**

En 1929, los matemáticos polacos B. Knaster, C. Kuratowski y S. Mazurkiewicz usando el lema de Sperner obtuvieron un resultado geométrico sobre cubrimientos cerrados de un simplex en Rn que se conoce ahora como el teorema KKM [7] y lo aplicaron para obtener una prueba elemental del teorema de punto fijo de Brouwer[3]. Posteriormente se demostró que estos tres resultados son mutuamente equivalentes [11].

En este trabajo presentamos primero una extensión del clásico teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics (teorema KKM) a espacios vectoriales topológicos de Hausdorff infinito dimensionales conocida como el teorema de Fan-KKM [4] que se obtiene mediante el uso de las correspondencias KKM. Luego, como aplicación del teorema de Fan-KKM demostramos, primero un teorema básico sobre la existencia de soluciones de desigualdades variacionales y luego, demostramos un teorema de punto fijo para correspondencias que contiene como caso especial una generalización del teorema de punto fijo de Tichonoff. Este teorema básico es de gran importancia en el análisis funcional no lineal moderno por sus variadas aplicaciones [3], [8], [10], [12].

El propósito principal de este trabajo es extender el teorema de Fan-KKM mediante el uso de las correspondencias KKM generalizadas (una relajación de las correspondencias KKM) introducidas en [4].

**Palabras clave:** Teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics (teorema KKM), Teorema de Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics (teorema de Fan-KKM o teorema FKKM); correspondencia semicontinua superior; correspondencias KKM, correspondencias KKM generalizadas, desigualdades variacionales; Teorema de Punto Fijo.

**ABSTRACT**

 In 1929, the Polish Mathematicians B. Knaster, C. Kuratowski and S. Mazurkiewicz using the Sperner lemma obtained a geometrical result on the closed coverings of a simplex in ℝn that is now known as the KKM Theorem [7] and applied it to obtain an elementary proof of Brouwer's fixed-point theorem [3]. Subsequently it was shown that these three results are mutually equivalent [11].

 In this paper we first present an extension of the classic Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics theorem (KKM Theorem) to infinite dimensional Hausdorff vector topological spaces known as the Fan-KKM theorem [4] that is obtained by using the KKM correspondences. Then, as an application of the Fan-KKM Theorem we show, first a basic theorem about the existence of solutions of variational inequalities and then, we prove a fixed-point theorem for correspondences that contains as a special case a generalization of the Tichonoff fixed-point theorem. This basic theorem is of great importance in modern non-linear functional analysis for its varied applications [3], [8], [10], [12].

 The main purpose of this work is to extend the Fan-KKM theorem by using the generalized KKM correspondences (a relaxation of the KKM correspondences) introduced in [4].

**Keywords**: Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics Theorem (KKM Theorem), Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewics Theorem (Fan-KKM Theorem); Multivalued mappings; KKM multivalued mappings, Generalized KKM multivalued mappings, Variational inequalities; Fixed Point Theorem.

1. **INTRODUCCIÓN**

En análisis no lineal es posible resolver una variedad de problemas demostrando que la intersección de cierta familia de subconjuntos de un conjunto dado, es no vacía. Cada punto de esta intersección no vacía puede ser un punto fijo, un punto de coincidencia, un punto silla, un punto óptimo u otros, dependiendo del problema en consideración. El primer resultado notable sobre la intersección no vacía es el célebre teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (o simplemente teorema KKM) obtenido en 1929 [7]. Es bien sabido que los tres resultados clásicos: el teorema de punto fijo de Brouwer, el lema de Sperner y el teorema KKM, son mutuamente equivalentes [11] en el sentido de que cada uno de ellos se puede deducir del otro con o sin ayuda de otros resultados menores.

El teorema KKM es de gran importancia en el análisis no lineal. Apareció primero en la conocida prueba del teorema de punto fijo de Brouwer [7]. En 1961, Ky Fan [6] demostró que la afirmación del teorema KKM permanece válida cuando se reemplaza el n-simplex de ℝn por un subconjunto arbitrario de cualquier espacio vectorial topológico E y, lo que es más importante, dio diversas aplicaciones de esta extensión; desde entonces se han encontrado numerosas aplicaciones más ([3], [12], [10], [11], [12]) y el uso de sus métodos (técnica KKM) es ahora una herramienta usual en varios campos de la Matemática.

En este trabajo introducimos los conceptos y propiedades de las correspondencias, en particular las correspondencias KKM y correspondencias KKM generalizadas [4]. Mediante las correspondencias KKM se obtiene una extensión del teorema KKM y, mediante las correspondencias KKM generalizadas se obtiene, a su vez, una extensión más general del teorema de Fan- KKM [4].

1. **PRELIMINARES**

Introducimos primero el concepto de correspondencia (aplicación multivaluada, aplicación punto a conjunto, multifunción) que será de gran importancia en este trabajo, así como sus propiedades y los conceptos de semicontinuidad y de punto fijo, para funciones y correspondencias.

**Definición 2.1.** Sean X e Y conjuntos y 2Y el conjunto de todos los subconjuntos de Y. Una **correspondencia** (multifunción, aplicación multivaluadaoaplicación punto a conjunto)

F : X  2Y es una función de X en el conjunto potencia 2Y de Y, que denotaremos por

F : X ⮆ Y o simplemente por F : X → Y. El subconjunto (x) de Y, se llama el **valor** o la **imagen** de F en el punto x de X.

Notemos que si el subconjunto F(x) de Y consta de un solo punto para todo x de X, entonces la correspondencia F es una aplicación (o función) de X en Y (en este caso diremos que F es univaluada). En consecuencia, la clase de las correspondencias de X en Y es más amplia que la clase de las aplicaciones (o funciones) de X en Y.

**Definición 2.2.** Sea F: X ⮆ Y una correspondencia. Entonces:

1. el **dominio** **efectivo** de F es conjunto Dom (F) = {x ∈ X / F(x) ≠ ∅}.
2. la F **- imágen** de un subconjunto no vacío A de X es el conjunto F(A) = F(x).
3. si A =  , escribimos F() = .
4. el **rango** de F es el conjunto F(X). Si F(X) = Y, decimos que Fes sobreyectiva.
5. la **gráfica** de F es el conjunto Graf (F) = {(x*,* y) ∈ X x Y / y ∈ F(x)}.
6. F es de **valores no vacíos** si el conjunto F(x)   ∀ x ∈ X.
7. F es de **valores convexos** si el conjunto F(x) es convexo ∀ x ∈ X.
8. F es de **valores cerrados** si el conjunto F(x) es cerrado ∀ x ∈ X.
9. F es de **valores compactos** si el conjunto F(x) es compacto ∀ x ∈ X.

**Definición 2.3.** Sea F: X → Y es una correspondencia. Entonces:

la **inversa inferior** de F, es la correspondencia F– : Y → X, definida por

F–(y) = {x  X / y  F(x)} ∀ y ∈ Y.

Si B ⊂ Y, entonces se cumple: F– (B) = {x  X / F(x) ∩ B ≠ Ф }. Es claro que, (F**–**)**–** = F.

**Definición 2.4.** La **inversa superior** de F es la correspondencia F+: P(Y) → X, definida por

F**+**(B) = {x  X / F(x) ⊂ B} ∀ B ⊂ Y.

Notemos que, cuando F es una aplicación univaluada f, entonces se cumple que F**–** = F**+** = f**–1**. Se cumplen también las siguientes propiedades de F+ y F–: Para todo B ⊂ Y:

1. X – F+ (B) = F– (Y – B).
2. X – F– (B) = F+ (Y – B).

 Los subconjuntos de X:

1. F– (y) = {xX / y ****F(x)} yY se llaman las **fibras** de F y,
2. X \ F– (y) = {xX / y ****F(x)}yY se llaman las **cofibras** de F.

Cuando Xe Y son espacios topológicos, nos planteamos el problema natural de extender de manera coherente el concepto de continuidad para aplicaciones de X en Y al contexto de las correspondencias F : X ⮆ Y. Una solución sería considerar a F como una función de *X* en el conjunto potencia 2Y de Y, definir en 2Y una topología apropiada relacionada con la topología de Y para luego definir la continuidad de F en el sentido usual (continuidad entre espacios topológicos). Sin embargo, como las topologías inducidas en 2Y son difíciles de interpretar en relación con las aplicaciones de las correspondencias, resulta más apropiado considerar a F como una aplicación “punto a conjunto” de X en 2Y y definir la continuidad de F mediante la topología de Y.

Definición 2.5. Sean X , Y espacios topológicos, F : X ⮆ Y una correspondencia y xo ∈ X. Entonces F se llama *semicontinua superior* (s. c. s) en xo,si y sólo si, para todo conjunto abierto *G* ⊂ *Y* con F(xo) ⊂ G, existe una vecindad U de xo, tal que

F(x) ⊂ G, ∀ x ∈ U.

Observación 2.1. Es fácil ver que, cuando F es una correspondencia unívoca, es decir, si F es una aplicación f (o función), entonces la semicontinuidad superior de F en x0, coincide con la continuidad de f en x0, es decir, la semicontinuidad superior de una correspondencia unívoca se reduce a la continuidad de una aplicación.

**Definición 2.6.** Sean X , Y espacios topológicos, F : X ⮆ Y una correspondencia y xo ∈ X. La correspondencia F: X ⮆ Y se llama ***semicontinua******inferior* (s. c. i.)** en xo ∈ X si para todo conjunto abierto G ⊂ Y con F(xo) ∩ G ≠ ∅, existe una vecindad U de xo  tal que,

F(x) ∩ G ≠  ∀ x ∈ U.

Decimos que F es semicontinua inferior (superior) en X (o simplemente, semicontinua inferior (superior)) si es semicontinua inferior (superior) en cada punto x de X.

**Observación 2.2.** Si F es una correspondencia unívoca (aplicación), entonces F es semicontinua inferior en xo si y sólo si, F es continua en xo.

De las dos observaciones anteriores, los conceptos de semicontinuidad superior e inferior que resultan totalmente diferentes para correspondencias generales, coinciden y son equivalentes a la continuidad usual (de aplicaciones) en caso de correspondencias unívocas para aplicaciones (o funciones). Por tanto, es el carácter multivaluado de las correspondencias el que juega un papel importante en el estudio de la continuidad de correspondencias.

Definición 2.7. Una correspondencia F : X ⮆ Y es continua en xo ∈ X si F es a la vez, semicontinua superior y semicontinua inferior en xo. Decimos que F : X ⮆ Y es continua en X (o simplemente continua) si F es continua en cada punto de X.

**Definición 2.8.** SeaF :X ⮆ Y una correspondencia. Un punto  X se llama un **punto fijo** de F si  F() (“inclusión de punto fijo”).

Notemos que si F es una correspondencia unívoca (aplicación o función) entonces

la inclusión de punto fijo,  F(), se reduce a la “ecuación de punto fijo”:  = F().

Existe una gran variedad de teoremas que garantizan la existencia de al menos un punto fijo tanto para funciones como para correspondencias.

**Teorema 2.1. (El teorema de punto fijo de Brouwer).** Sea C  n un conjunto no vacío convexo y compacto y, T: C  C una aplicación continua, entonces C tal que El punto  se llama “punto fijo” de T.

Los conceptos de semicontinuidad superior e inferior de una función definida en un espacio topológico juegan un papel muy importante en nuestro trabajo y se definen como sigue.

**definición 2.9.** Sea (X, ) un espacio topológico de Hausdorff y f : X  IR {} una función. Diremos que la función f es **semicontinua inferior** (s. c. i.) en un punto xoX si, una vecindad U de xo en X, tal que, f(U)  ( f(xo) -, +], es decir, si < f(xo), una vecindad U de xo tal que, < f(x) xU. Diremos que una función es semicontinua inferior (en X) si lo es en cada punto de X.

**Definición 2.10.** Diremos que una función f es **semicontinua superior** en x0 si –f es semicontinua inferior en x0.

La semicontinuidad inferior de una función numérica se puede caracterizar en términos de los conjuntos de nivel de dicha función, como sigue:

**Definición 2.11.** Sea X un espacio topológico. Una función f : X  ℝ {} es semicontinua inferior (s.c.i.) si los conjuntos de nivel inferior de f, Nλ(f) ={xX/ f(x) } son cerrados en X para todo ℝ.

La convexidad de conjuntos y de funciones juega un papel muy importante en este trabajo.

**Definición 2.11. (Conjunto Convexo)** Sea H un espacio vectorial (ℝn en particular).

1. Un conjunto  se llama **convexo** si para todo par de puntos , el segmento de recta [x, y], definido por  está enteramente contenido en C.
2. Se llama **Capsula Convexa** (o envolvente convexa) de un subconjunto A de H y se denota por Co(A), a la intersección de todos los subconjuntos convexos que contienen al conjunto A.

Algunas propiedades algebraicas y/o topológicas de los conjuntos convexos que serán de gran utilidad, son:

(a) Si  es una familia de conjuntos convexos cerrados no vacíos, entonces  es un conjunto convexo cerrado.

(b) Si A es convexo, entonces  (interior de A) y (cerradura de A) son conjuntos convexos.

(c) La combinación lineal de conjuntos convexos es un conjunto convexo, es decir, si S y T son conjuntos convexos, entonces  es un conjunto convexo.

**Definición 2.12.** **(Conjunto afínmente independiente).** El conjunto {x0, x1,..., xn}  X de n+1 puntos del espacio vectorial X se llama **afínmente independiente** si el conjunto

A0 = {x1 – x0, x2 – x0, …, xn – x0}

de n puntos de X, es linealmente independiente.

**Observaciones 2.2.**

(a) Si A0 es linealmente independiente, entonces el conjunto

Ai = {x1 – xi, x2 – xi, …, xi-1 – xi, xi+1 – xi, …, xn – xi}

 es también linealmente independiente para 1  i  n.

 (b) Si el conjunto A = {x0, x1, ..., xn} es afínmente independiente, entonces su capsula convexa Co(A) := , se llama **n-simplex** (o **simplex n-dimensional)**.

(c) Si 0 i0 < i1 <…< ik  n entonces el simplex se llama cara k- dimensional del n-simplex .

(d) Todo punto x  tiene una única representación como combinación convexa de los puntos x0, x1, ..., xn.

(e) Si X es un espacio vectorial topológico y A  X es compacto, entonces Co (A) es un conjunto compacto.

**Definición 2.13.** Sean E un espacio vectorial real,  un subconjunto convexo y , donde . Entonces:

1. la función f es **convexa** si x, yC y , se cumple que

,

 siempre que el segundo miembro de esta desigualdad tenga sentido.

1. la función f es **cuasiconvexa** si x, yC y , se cumple que

.

1. la función f es **cuasicóncava** si – f es cuasiconvexa.

Serán de utilidad los siguientes teoremas de separación de conjuntos convexos cuyas demostraciones puede verse en [3].

**Teorema 2.2.** SeaX un espacio vectorial real topológico,   A, B  X convexos con A  B =  y int (A) . Entonces existe una función lineal continua : X  ℝ y un  ℝ tales que (x)    (y), x  A, y  B.

**Teorema 2.3.** SeaX un espacio vectorial real topológico, localmente convexo. Sean   A, B  X convexos con A  B = .Sean además A cerrado y B compacto. Entonces, existen una función lineal continua : X  ℝ y , ℝ tales que (x) <  <  < (y)

 x  A, y  B.

1. **EL CLÁSICO TEOREMA DE KNASTER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ (TEOREMA KKM).**

En 1929, tres matemáticos polacos Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM) [7] usando el Lema de Sperner, establecieron el siguiente resultado geométrico sobre cubrimientos cerrados de un simplex en ℝn que se conoce como el teorema de **Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz** o simplemente como el **teorema** **KKM** que se enuncia como sigue:

**Teorema 3.1 (Teorema KKM).** Sea X el conjunto de los vértices de un símplex en ℝn y sea

F :X ⮆ Y una correspondencia con valores compactos no vacíos. Si F satisface además la condición: para todo {x1, x2, …, xn}  X se cumple que

Co {x1, x2, …, xn}  .

 Entonces

.

En 1961, Ky Fan [6] extendió significativamente este resultado a espacios de dimensión infinita, conocido históricamente como lema de Ky Fan o teorema de Fan-KKM o teorema FKKM,que se enuncia como sigue:

**Teorema 3.2. (Teorema de Fan-KKM)** Sea E un espacio vectorial topológico real, X  E y F : X **⮆** E una correspondencia tal que F(x) es un subconjunto no vacío y cerrado de E para todo x de X y F(x0) es compacto para algún x0X fijo. Además, si para todo subconjunto finito {x1, x2, …, xn}  X se cumple que Co{x1, x2, …, xn}  , entonces .

Este teorema afirma que la familia de conjuntos $\left(F\left(x\right)\right)\_{x\in X} $ tiene al menos un punto en común. Este resultado, por sus numerosas aplicaciones, es una herramienta muy útil en la solución de problemas del análisis no lineal ([1], [3], [8], [9], [10], [11] y [12]) y ha sido usado por varios autores para probar desigualdades minimax y teoremas de punto fijo para aplicaciones multivaluadas en espacios vectoriales topológicos y, para obtener aplicaciones a la economía matemática, al análisis convexo, a problemas de equilibrio, etc. Por otro lado, en [5] Ky Fan también probó su famosa desigualdad minimax.

En este trabajo, mediante el concepto de correspondencia KKM presentamos una extensión del teorema KKM a espacios vectoriales topológicos de Hausdorff conocida como el Teorema de Fan-KKM y a la vez, mediante el concepto de correspondencia KKM generalizada, presentamos una extensión general del teorema de Fan-KKM.

1. **UNA EXTENSIÓN DEL TEOREMA KNASER-KURATOWSKI-MAZURKIEWICZ**

A continuación, demostramos una extensión del famoso teorema de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz(teorema KKM) a espacios vectoriales topológicos de Hausdorff obtenida por Ky Fan [5] conocida como el teorema de Fan-KKM.

**Teorema 4.1 (teorema de Fan-KKM)** Sean E un espacio vectorial topológico, X  E,

F : X ⮆ E una correspondencia tal que F(x) es cerrado y no vacío para todo x  X y, F(x0) es compacto para algún x0  X fijo. Además, si para todo subconjunto finito
{x1, x2, ..., xn}  X, co{x1, x2, ..., xn}  , entonces .

**Demostración.** Si hacemos , entonces 

.

Como *F*(x0) es compacto y los  son subconjuntos cerrados de , será suficiente demostrar que la familia de conjuntos  tiene la propiedad de la intersección finita (PIF), es decir, que para todo subconjunto finito {x1, x2, ..., xn}  X se cumple 

En efecto, consideremos el subconjunto finito {x0, x1, ..., xn} X y un n-simplex
S =   ℝn de dimensión n. Definamos la aplicación : S E como sigue:

Para  con = 1, , j = 0,1, ...,n definimos .

Así, la aplicación  es entonces bien definida y continua. Por tanto, para cada j,
Hj = , j = 0,1, ..., n, es un conjunto cerrado en S.

Ahora, según las hipótesis, si 0  i0 < i1 < ... < ik  n, entonces

{...}  .

Luego,

({...})  =

=

= .

Esto y el clásico Teorema KKM implican que

    =  = .

De esto obtenemos finalmente,

= ,

es decir, la familia  tiene la PIF.

Por tanto, .

1. **EL TEOREMA DE FAN-KKM Y LAS DESIGUALDADES VARIACIONALES**

A continuación, y basados en el Teorema de Fan KKM demostraremos un teorema básico para la existencia de soluciones de desigualdades variacionales.

**Teorema 5.1. (Desigualdad Minimax de Ky Fan).** Sean X un subconjunto convexo y compacto de un espacio vectorial topológico y f : X x X  ℝ una función con las siguientes propiedades:

(a) Para todo xX fijo, f(x, y) es una función de y, semicontinua superior (semicontinua superior en la segunda variable y) en X.

(b) Para todo yX fijo, f(x, y) es una función de x, cuasiconvexa (cuasiconvexa en la primera variable x) en X.

Entonces, existe un X, tal que,

   .

**Demostración.** Sea ****. Podemos asumir que 

Para tododefinimos la correspondencia F como:

 = { y  X / f(x, y)  ****}.

La compacidad de X y la hipótesis (a) implican que  es cerrado y compacto. Luego, será suficiente demostrar que

.

En vista del teorema de Fan-KKM demostraremos que

co {x1, x2, ..., xn}  , (5.1)

para todo subconjunto finito {x1, x2, ..., xn}  X. En efecto, supongamos que exista un conjunto finito {x1, x2, ..., xn}  X tal que

co {x1, x2, ..., xn}  .

Entonces, existe un punto y tal que

y co {x1, x2, ..., xn} pero y  ,

es decir, y = con = 1, , j = 1, ...,n y

 < **** para todo i = 1, ..., n.

Luego se cumple que < **** para todo i = 1, ..., n.

Esta desigualdad y la hipótesis (b) implican que

(,)   < ****.

Esto contradice la definición de ****. Por consiguiente se cumple (5.1) para todo subconjunto finito {x1, x2, ..., xn}  X.

A continuación, presentamos una consecuencia del teorema anterior.

**Corolario 5.1.** Sea L un espacio vectorial topológico, X  L un subconjunto convexo y compacto y, sea g : X x X  ℝ una función con las siguientes propiedades:

(a) Para todo xX fijo, la función f(x, y) = g(x, y) – g(y, y) es una función de y, semicontinua superior en X.

(b) Para todo yX fijo, g(x, y) es una función de x, cuasiconvexa en X.

Entonces existe unX tal que     .

**Demostración.** La función f(x, y) cumple con las hipótesis del teorema 5.1. Ya que , por este mismo teorema existe un  X tal que

f(x, y0) = g(x, y0) - g(y0, y0)  0 .

**Observación 5.1.** La hipótesis (a) del corolario 5.1 se cumple si g: X x X  ℝ es continua.

1. **APLICACIONES DEL TEOREMA DE FAN-KKM A LA TEORÍA DE PUNTO FIJO PARA CORRESPONDENCIAS**

En base al teorema de Fan-KKM demostraremos un teorema de punto fijo para correspondencias que contiene como caso especial una generalización del teorema de punto fijo de Tichonoff.

**Teorema 6.1.** Sea L un espacio vectorial topológico localmente convexo,  un conjunto compacto y convexo. Si F: X ⮆ X es una correspondencia continua tal que F(x) es no vacío, cerrado y convexo para todo xX, entonces F tiene al menos un punto fijo.

**Demostración.** Sea L\* el espacio dual de L, es decir, el espacio de los funcionales lineales continuos . Para cada definimos

 = .

Como F(y) es compacto para todo yX y F es continua, el teorema del máximo de Berge [2] implica que la función



es continua en X. Por tanto,  es continua y el conjunto  es cerrado para todo . Además, para todo fijo,  es una función afín lineal de x.

Ahora, consideremos el subconjunto finito {, , …, } cualquiera de L\*. Y definamos la función . Luego, la función  es continua .

Si definimos , también  es continua. Además, para todo  fijo,  es una función de x convexa en X.

Por consiguiente,  cumple con las hipótesis del corolario 5.1 y por tanto existe un  tal que

 , . (6.1)

Si  se cumple evidentemente que

  , , ó .

Esto y (6.1) implican que

 ó , ,

es decir,

 (6.2)

Ya que para todo ,  es un subconjunto cerrado del conjunto compacto X, (6.2) implica que



Ahora, si  , entonces  cumple que

 =    , .

Esto implica que   . En efecto, si fuera , entonces de acuerdo con el teorema de separación fuerte de conjuntos convexos (teorema 2.3), existiría un , tal que

 >

desde que  es convexo y cerrado, lo que sería una contradicción.

Del teorema 6.1 se obtiene como caso especial el Teorema de punto fijo de Tichonoff.

**Corolario 6.1 (Teorema de punto fijo de Tichonoff)** Sea L un espacio vectorial topológico localmente convexo,  un conjunto compacto y convexo y f : X  X una función continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo, es decir, existe un , tal que f() =.

1. **UNA EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE FAN- KKM**

A fin de obtener una extensión del teorema de Fan-KKM demostrado anteriormente, introduciremos dos tipos especiales de correspondencias: las correspondencias KKM y correspondencias KKM generalizadas.

**Definición 7.1** Sea *E* es un espacio vectorial Topológico de Haussdorff y . La correspondencia F : X ⮆ E se llama correspondencia KKM, si y sólo si, para todo subconjunto finitose cumple que 

Una definición más compacta pero equivalente a la definición anterior, es: la correspondencia F : X ⮆ E es una correspondencia KKM si y sólo si, D  < X > ,
 co D  F(D) donde < X > denota el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X.

Notemos que si F es una correspondencia KKM, entonces xF(x) xX, es decir cada punto xX, es punto fijo de F.

**Ejemplos 7.1**

1. Sean E = ℝ2, X = {(0, 0), (1, 0), (0, 1)} y F : X ⮆ ℝ2 la correspondencia definida por F(u, v) =  ((u, v), 1) (bola cerrada de centro (u, v) y radio 1)(u, v)X . Se puede verificar que D  < X > co D F(D). Por tanto, F es una correspondencia KKM.
Notemos también que (u, v)  F(u, v) (u, v)X .
2. Si E = ℝ2 y X = ℝ2+, la correspondencia G : X ⮆ E definida por G(u, v) = ((u, v), r) (bola cerrada de centro (u, v) y radio r)(u, v)X donde , es una correspondencia KKM.
3. Si E = ℝ2 y X = ℝ2+, la correspondencia H: X ⮆ E definida por
H(u, v) = {(x, y)  ℝ2  / x + y ≤ ½( u + v)} (u, v)X, no es una correspondencia KKM (notemos que (u, v)X / (u, v)  H(u, v)).
4. La correspondencia F : [1, 3] ⮆ ℝ definida por



no es una correspondencia KKM. En efecto, si D es cualquier subconjunto finito de
 [1, 2] entonces co D  F(D) pues co D  [1, 2] y F(D) =F(x) = [-1, 1].

A continuación, definimos un concepto más general que el de correspondencia KKM: el de correspondencia KKM generalizada que fue introducido por Chang y Zhang [4].

**Definición 7.2.** Sean E y E´ dos espacios vectoriales topológicos y sean X, Y dos subconjuntos convexos de E y E´ respectivamente. La correspondencia F : X ⮆ E´ se llama correspondencia KKM generalizada, si y sólo si, para todo subconjunto finito existe un conjunto finito , tal que para todo subconjunto se cumple que

 (7.1)

**Observación 7.1** Toda correspondencia KKM de X en E es una correspondencia KKM generalizada de X en E. En efecto, de la definición 7.2 tenemos que, si F : X ⮆ E es una correspondencia KKM , entonces para cualquier subconjunto finito existe un conjunto finito con yi = xi, i =1, …, n. Así, F satisface (7.1) con . Por tanto F es una correspondencia KKM generalizada. Esto demuestra que la clase de las correspondencias KKM está contenida en la clase de las correspondencias KKM generalizadas.

**Observación 7.2.** La inclusión de la clase de correspondencias KKM en la clase de las correspondencias KKM generalizadas, es estricta. En efecto, veamos el siguiente

**Ejemplo 7.2.** Sean  y F : X ⮆ E la correspondencia definida por   (gráfica en la fig. 7.1).

Notemos que  y que 

Por tanto F : X ⮆ E no es una correspondencia KKM.

Ahora probaremos que F : X ⮆ E es una correspondencia KKM generalizada. En efecto, si para cualquier subconjunto finito consideramos el subconjunto ⊂ [-1, 1], entonces para cualquier subconjunto se cumple que



Lo que demuestra que F : X ⮆ E es una correspondencia KKM generalizada.



**Fig. n° 7.1**

**Teorema 7.1.** (**Una extensión del teorema de Fan-KKM [4]**). Sean *E* un espacio vectorial Topológico de Haussdorff,  un subconjunto no vacío, F : X ⮆ E una correspondencia tal que, para todo  el conjunto F(x)es finitamente cerrado[[1]](#footnote-1), entonces, F es una correspondencia KKM generalizada si y sólo si para todo subconjunto finito  la intersección de la subfamilia  es no vacía, esto es, .

**Demostración.**  Por hipótesis, para cualquier conjunto finito arbitrario  se tiene .

Sea  y elijamos para . Entonces para todo subconjunto tenemos

.

Por tanto, *F* es una correspondencia KKM generalizada.

 Sea F : X ⮆ E una correspondencia KKM generalizada. Supongamos por el contrario que la familia no tiene la propiedad de la intersección finita (PIF). Entonces existe un conjunto finito  tal que .

Por ser, *F* una correspondencia KKM generalizada, existe un conjunto tal que para todo subconjunto



se cumple que

.

En particular, para *k = n* se tiene que



Sea *S* = . Ya que  es finitamente cerrado, entonces los conjuntos  son cerrados (en la topología Euclidiana de L).

Sea *d* la métrica euclidiana sobre L. Se verifica entonces que

. (7.2)

Ahora definimos la función  como:

.

De (7.2) y desde que  se sigue qué .

Ahora, sea  la función definida por

.

Así definida, la función *h* es continua y por ser S un conjunto convexo y compacto, el teorema de punto fijo de Brouwer implica que existe un punto  tal que

 (7.3)

Sea . Luego, por (7.1), para todo . Ya que , entonces , es decir,

 (7.4)

De (7.3) y (7.4) tenemos que

.

Pero, siendo F : X ⮆ E una correspondencia KKM generalizada, tenemos que



lo que contradice (7.4). Por tanto, la familia tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) y se cumple la tesis.

Del teorema anterior se obtiene como consecuencia el teorema de Fan-KKM:

**Teorema 7.2.** (**Teorema de Fan-KKM [6]**) Sea E un espacio vectorial topológico de Hausdorff,  un subconjunto no vacío, F : X ⮆ E una correspondencia con valores cerrados (es decir, para todo  el conjunto F(x)es cerrado) tal que

1. Existe tal que es compacto.
2. Para todo subconjunto finito  Entonces .

**Demostración.** Ya que el conjunto F(x)es cerrado, los conjuntos
 $\overbar{F}\left(x\right)=$ *F*(x) $∩$ son finitamente cerrados (en la topología euclidiana de cualquier subespacio finito dimensional). Ahora, por la hipótesis (b), la correspondencia $\overbar{F} $es una correspondencia KKM y, por tanto una correspondencia KKM generalizada. Luego, por el teorema 7.1 obtenemos que $\bigcap\_{x\in I}^{}\overbar{F}\left(x\right)\ne ∅ $ para todo subconjunto finito I de X, es decir, la familia de cerrados $\left(\overbar{F}\left(x\right)\right)\_{x\in X}$ tiene la PIF (propiedad de la intersección finita). Ya que, $\bigcap\_{x\in X}^{}F\left(x\right)= \bigcap\_{x\in X}^{}\overbar{F}\left(x\right) \ne ∅$, entonces $\bigcap\_{x\in X}^{}F\left(x\right) \ne ∅$.

# REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

**[1] AUBIN, J-P.** Applied Functional Analysis,John Wiley, New York, (1 979).

**[2] BERGE, C.** Topological spaces.The Mac Millan Company. New York, 1 963.

**[3] BORDER, K.** Fixed point theorems with applications to economics and game theory.Cambridge University Press (1 985).

**[4] CHANG S. S. y ZHANG Y.,** Generalized KKM Theorem and Variational Inequalities.Journal of Mathematical Analysis and Applications 159 (1 991) 208-223.

**[5] FAN, K.** Fixed Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces**.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 38, (1 952). 121-126.

**[6] FAN, K.** A Generalization a Tychonoff’s Fixed Point Theory, Math. Ann. 142 (1 961), 305-310.

**[7] KNASTER B., KURATOWSKI C. Y MAZURKIEWICZ, S.** Ein Beweis des Fixpunktsatzes Für n-dimensionale Simplexe, Fund. Math. 14 (1 929), 132-137**.**

**[8] RAMÍREZ LARA, G.** La Teoría de Correspondencias y una Aplicación a la Teoría Económica. Tesis para optar el grado de Magister en Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. 1 990.

**[9] ROCKAFELLAR, R. T. y WETS R. J-B.,** Variational Analysis, Springer Verlag, Heidelberg New York, 1 998.

**[10] XIAN-ZHI YUAN, GEORGE.** KKM theory and Applications in nonlinear analysis. Marcel Dekker, Inc. 1 999.

**[11] ZANGWILL W. I. Y GARCÍA C. B.,** Pathways to solutions, fixed points, and equilibria, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1 981.

**[12] ZEIDLER E.,** Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Tomos I y IV. Fixed Point Theory. Springer-Verlag (1 986).

1. Sea *E* un espacio vectorial topológico de Hausdorff. Un conjunto  es finitamente cerrado si, para todo subespacio finito dimensional *L*,  es cerrado en la topología Euclidiana de *L.* [↑](#footnote-ref-1)