SOBRE EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA UN SISTEMA PARTICULAR DE ECUACIONES DE KDV*

SANTOS ÑIQUE ROMERO†, RAÚL SARÁCHAGA VILLANUEVA‡, AND MARCOS FERRER REYNA§

Resumen. En este trabajo estudiaremos la buena colocación local del problema de valor inicial asociado al sistema de ecuaciones de KdV. Usando las estimaciones biliniales establecidas por Kenig, Ponce y Vega en el espacio de restricciones de la transformada de Fourier probaremos el resultado local para un dato inicial dado en un espacio de Sobolev de orden mayor que $-3/4$.

Palabras claves. Problema de Cauchy, buen planteamiento y existencia.

1. Introducción. Las dos ecuaciones consideradas en el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
u_t + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + uu_x + a_1 vv_x + a_2(uv)_x & = & 0, \quad x,t\in\mathbb{R} \\
b_1 v_t + v_{xxx} + b_2 a_3 u_{xxx} + vv_x + b_2 a_2 uu_x + b_2 a_1 (uv)_x & = & 0, \\
u(x,0) = \phi(x), & & \\
v(x,0) = \eta(x), & &
\end{array}\right. \tag{1.1}
$$

fueron derivadas por Gear y Grimshaw [11] como un modelo para describir la interacción fuerte de dos ondas internas largas de gravedad en un fluido estratificado. En la literatura, estas se conocen con el nombre de Sistema Acoplado de KdV o también como Sistema G-G. En [5], Bona, Ponce, Saut y Tom, muestran que el PVI (1.1) es globalmente bien colocado en $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 1$. Además, Ash, Cohen y Wang [2] probaron que (1.1) es localmente y globalmente bien colocado en $L^2(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$.

Observemos la similitud del sistema acoplado de ecuaciones (1.1) con la conocida ecuación de KdV

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$$

estudiada en [7], la cual modela la propagación de ondas en la dirección sobre la superficie de un cuerpo de agua de poca profundidad. Por Bourgain [7], se sabe que el resultado de buena colocación para ella en $H^s(\mathbb{R})$, con $s > -3/4$, es esencialmente óptimo. Pero Tzvetkow [20] encontró que esta ecuación de KdV está localmente mal colocada en $H^s(\mathbb{R})$ para $s < -3/4$. Siguiendo este orden de ideas, se espera que el PVI (1.1) está mal colocado en $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ para $s < -3/4$ y bien colocado para $s > -3/4$.

El objetivo principal de este trabajo es presentar la versión mejorada del resultado dado en [2], probando la buena colocación local para el PVI (1.1) en $H^s(\mathbb{R})\times H^s(\mathbb{R})$ para $s > -3/4$, utilizando el método inicado por Bourgain y luego desarrollado posteriormente por Kenin, Ponce y Vega. Antes de presentar el principal resultado de este trabajo, indiquemos algunas notaciones relacionadas con los espacios normados de restricciones de Fourier que serán utilizadas en este trabajo.

*Departamento de Matemáticas Universidad Nacional de Trujillo.
†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(siqueromero@hotmail.com).
‡Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(rasv92@hotmail.com).
§Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo(ferrer_m2007@hotmail.com).

Notaciones. Usamos $X_{s,b}$ para denotar al espacio de Bourgain, siendo este un subconjunto de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dotado de la norma

$$\|u\|_{X_{s,b}} = \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau - \xi^3\rangle^b \, \widehat{u} \, \|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

donde $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier de u en ambas variables ξ y τ.
Para $T > 0$, $X_{s,b}[-T,T] = \{u|_{[-T,T]} : u \in X_{s,b}\}$ denota el espacio de restricciones de Fourier, normado con

$$\|u\|_{X_{s,b}[-T,T]} = \inf\{\|\widetilde{u}\|_{X_{s,b}} : u = \widetilde{u}|_{[-T,T]}, \widetilde{u} \in X_{s,b}\}$$

.

El principal resultado de este trabajo es

Teorema 1.1. *Para $(\eta,\mu) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ con $s > -3/4$ y $b \in (1/2, 1)$, existe $T = T(\|\eta\|_{H^s}, \|\mu\|_{H^s}) > 0$ y una única solución (u,v) en $X_{s,b}[-T,T] \times X_{s,b}[-T,T]$ de la ecuación integral*

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = \psi_1(t)U(t)\eta \; - \psi_1(t) \int_0^t U(t-t')\psi_\delta(t')F(u,v,\partial_x u, \partial_x v)(t')dt', \\ \\ v(t) = \psi_1(t)U(t)\mu \; - \psi_1(t) \int_0^t U(t-t')\psi_\delta(t')G(u,v,\partial_x u, \partial_x v)(t')dt', \end{array}\right. \tag{1.2}$$

asociada al problema de Cauchy reducido obtenido del problema (1.1).

2. Análisis y Discusión.

2.1. El problema reducido y el principio de Duhamel's.

Nuestro objetivo de esta sección es reemplazar el sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) por un sistema de ecuaciones integrales como el dado en (1.2). Para esto, transformaremos el sistema de ecuaciones del PVI (1.1) como un par de ecuaciones de KdV acopladas sólo en los términos no lineales. Es decir, diagonalizaremos la matriz de coeficientes de los términos dispersivos del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + uu_x + a_1 vv_x + a_2(uv)_x &=& 0, & x,t \in \mathbb{R} \\ v_t + \frac{1}{b_1}v_{xxx} + \frac{b_2 a_3}{b_1}u_{xxx} + \frac{1}{b_1}vv_x + \frac{b_2 a_2}{b_1}uu_x + \frac{b_2 a_1}{b_1}(uv)_x &=& 0, & \\ u(x,0) = \phi(x), & & & \\ v(x,0) = \eta(x), & & & \end{array}\right. \tag{2.1}$$

usando la teoría de autovalores y autovectores.

Para aplicar esta teoría, sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ \frac{b_2 a_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(W) = \begin{pmatrix} u + a_2 v & a_2 u + a_1 v \\ \frac{b_2 a_2}{b_1}u + \frac{b_2 a_1}{b_1}v & \frac{b_2 a_1}{b_1}u + \frac{1}{b_1}v \end{pmatrix}$$

donde $W = W(x,t) = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}$. Con esta elección de A y $B(W)$, y escribiendo

$$W_0 = W(x,0) = \begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix}$$

el sistema (1.1) se reescribe como

$$\left\{\begin{array}{r} \partial_t W + A\,\partial_x^3 W + B(W)\,\partial_x W = 0, \\ W(x,0) = W_0, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

donde A es la matriz a diagonalizar. Consideraremos dos casos.

Si $a_3 = 0$, la matriz A es diagonal. Es decir, el sistema (2.1) está desacoplado. Antes de diagonalizar A para el caso $a_3 \neq 0$, veamos que definiendo para $a_3^2 b_2 \neq 1$ los números α_- y α_+ como

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{b_1} \pm \lambda) \text{ donde } \lambda = \sqrt{(1 - \frac{1}{b_1})^2 + \frac{4b_2 a_3^2}{b_1}} > 0$$

entonces el siguiente lema asegura que estos números nunca se anulan.

Lema 2.1. *Si $a_3^2 b_2 \neq 1$, entonces $\alpha_\pm \neq 0$.*

Prueba. Por el absurdo. La forma como está definido λ y el absurdo supuesto (es decir, $\alpha_\pm = 0$), se tiene

$$\lambda = \sqrt{(1 - \frac{1}{b_1})^2 + \frac{4b_2 a_3^2}{b_1}} = \mp(1 + \frac{1}{b_1}).$$

En la última igualdad, elevamos al cuadrado y luego simplificamos para obtener la contradicción deseada $a_3^2 b_2 = 1$. ∎

La diagonalización de A para $a_3 \neq 0$, la obtendremos del conocido resultado: una matriz es diagonalizable si todas las raíces de su polinomio caracteristico son reales y distintas; siendo estas raíces los autovalores distintos de A. En nuestro caso, el polinomio caracteristico, $p(\alpha) = \det(A - \alpha I) = 0$, es

$$\alpha^2 - (1 + \frac{1}{b_1})\, \alpha + \frac{1}{b_1} - \frac{b_2 a_3^2}{b_1} = 0.$$

De donde

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2}\{(1 + \frac{1}{b_1})\, \pm \sqrt{(1 + \frac{1}{b_1})^2 - 4(\frac{1}{b_1} - \frac{b_2 a_3^2}{b_1}}).$$

Es decir,

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2}\{(1 + \frac{1}{b_1})\, \pm \sqrt{(1 - \frac{1}{b_1})^2 - \frac{4b_2 a_3^2}{b_1}}.$$

Luego, los dos números reales y diferentes definidos como

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2}\{(1 + \frac{1}{b_1})\, \pm \lambda\} \text{ donde } \lambda = \sqrt{(1 - \frac{1}{b_1})^2 + \frac{4b_2 a_3^2}{b_1}} > 0$$

son las raíces del polinomio caracteristico de A.

El siguiente lema utiliza la diagonalización de A para desacoplar los términos dispersivos del sistema (2,2).

Lema 2.2. *Consideremos la ecuación*

$$\partial_t W + A\, \partial_x^3 W + B(W)\, \partial_x W = 0, \tag{2.3}$$

donde

$$W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ \frac{b_2 a_3}{b_1} & \frac{1}{b_1} \end{pmatrix} \quad y$$

$$B(W) = \begin{pmatrix} u + a_2 v & a_2 u + a_1 v \\ \frac{b_2 a_2}{b_1} u + \frac{b_2 a_1}{b_1} v & \frac{b_2 a_1}{b_1} u + \frac{1}{b_1} v \end{pmatrix}.$$

Si A es tal que $a_3^2 b_2 \neq 1$ entonces existe una matriz $P \in GL(2)$ tal que el cambio de variable $W = PX$ con $X(x,t) = \begin{pmatrix} \widetilde{u}(x,t) \\ \widetilde{v}(x,t) \end{pmatrix}$ transforma a (2.3) en

$$\partial_t X + \mathrm{diag}(\alpha_+, \alpha_-)\, \partial_x^3 X + \widetilde{B}(X)\, \partial_x X = 0, \tag{2.4}$$

donde $\mathrm{diag}(\alpha_+, \alpha_-) = P^{-1} A P$ *con α_+ y α_- son las raíces del polinomio caracteristico de A y*

$$\widetilde{B}(X) = P^{-1} B(PX) P$$

Prueba. Por ser A diagonalizable, existe $P \in \mathrm{GL}(2)$. En este caso podemos definir el cambio de variables $W = PX$ y, por tanto, los reemplazos de $\partial_t W = P \partial_t X$, $\partial_x W = P \partial_x X$ y $\partial_{xxx} W = P \partial_{xxx} X$ en la ecuación (2.3), la transforma en

$$P \partial_t X + A P \partial_x^3 X + B(PX) P \partial_x X = 0,$$

es decir,

$$\partial_t X + \mathrm{diag}(\alpha_+, \alpha_-)\, \partial_x^3 X + P^{-1} B(PX) P \partial_x X = 0.$$

■

El siguiente resultado desacopla los términos dispersivos del sistema de ecuaciones (1.1).

Proposición 2.3. *El cambio de escala* $X = \begin{pmatrix} \widetilde{u}(x,t) \\ \widetilde{v}(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\alpha_+^{-1/3} x, t) \\ v(\alpha_-^{-1/3} x, t) \end{pmatrix}$ *transforma al sistema (2.4), donde $\widetilde{B}(X)$ es tomado como*

$$\widetilde{B}(X) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}\widetilde{u} + \widetilde{c}\widetilde{v} & \widetilde{b}\widetilde{v} + \widetilde{c}\widetilde{u} \\ \widetilde{d}\widetilde{u} + \widetilde{f}\widetilde{v} & \widetilde{e}\widetilde{v} + \widetilde{f}\widetilde{u} \end{pmatrix},$$

en el siguiente sistema de KdV

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x^3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} au + cv & bv + cu \\ du + fv & ev + fu \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xxx} \\ v_{xxx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} auu_x + bvv_x + c(uv)_x \\ duu_x + evv_x + f(uv)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

donde $a = \widetilde{a}$, $b = \widetilde{b}$, $c = \widetilde{c}$, y $d = \widetilde{d}$.

Prueba. Al reemplazar los siguientes cálculos

$$\partial_t X = \begin{pmatrix} \widetilde{u}_t \\ \widetilde{v}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{diag}(\alpha_+,\alpha_-)\,\partial_x^3 X = \operatorname{diag}(\alpha_+,\alpha_-)\begin{pmatrix}\widetilde{u}_{xxx}\\ \widetilde{v}_{xxx}\end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}(\alpha_+,\alpha_-)\begin{pmatrix}\alpha_+^{-1}u_{xxx}\\ \alpha_-^{-1}v_{xxx}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}u_{xxx}\\ v_{xxx}\end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\widetilde{B}(X)\,\partial_x X = \begin{pmatrix}\widetilde{a}\widetilde{u}+\widetilde{c}\widetilde{v} & \widetilde{b}\widetilde{v}+\widetilde{c}\widetilde{u}\\ \widetilde{d}\widetilde{u}+\widetilde{f}\widetilde{v} & \widetilde{e}\widetilde{v}+\widetilde{f}\widetilde{u}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\widetilde{u}_x\\ \widetilde{v}_x\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\widetilde{a}\widetilde{u}\widetilde{u}_x+\widetilde{b}\widetilde{v}\widetilde{v}_x+\widetilde{c}(\widetilde{u}\widetilde{v})_x\\ \widetilde{d}\widetilde{u}\widetilde{u}_x+\widetilde{e}\widetilde{v}\widetilde{v}_x+\widetilde{f}(\widetilde{u}\widetilde{v})_x\end{pmatrix}$$

en la ecuación (2.4), se sigue el resultado. ■

Observemos que el problema de cauchy reducido obtenido del sistema (1.1) es el sistema (2.5) de la proposición anterior sujeto a condiciones iniciales especificas, es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t+u_{xxx}+auu_x+bvv_x+c(uv)_x &=& 0,\\ v_t+v_{xxx}+duu_x+evv_x+f(uv)_x &=& 0,\\ u(x,0)=\phi(x), && \\ v(x,0)=\eta(x). && \end{array}\right. \tag{2.6}$$

También notemos que las dos ecuaciones del sistema anterior se pueden escribir como:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(t)+\partial_x^3 u(t)=F(u,v,\partial_x u,\partial_x v),\\ \partial_t v(t)+\partial_x^3 v(t)=G(u,v,\partial_x u,\partial_x v), \end{array}\right. \tag{2.7}$$

donde

$$F(u,v,\partial_x u,\partial_x v) = -(\frac{a}{2}(u^2)_x+\frac{b}{2}(v^2)_x+c(uv)_x) \quad \text{y} \tag{2.8}$$

$$G(u,v,\partial_x u,\partial_x v) = -(\frac{d}{2}(u^2)_x+\frac{e}{2}(v^2)_x+f(uv)_x). \tag{2.9}$$

Términamos la sección proporcionando, en un ambiente funcional adecuado, el principio de Duhamel's que transforma el sistema (2.7) en un sistema de ecuaciones integrales.

Proposición 2.4. *Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $(u,v)\in(C(\mathbb{R},H^{s+3})\times C(\mathbb{R},H^{s+3}))\cap(C^1(\mathbb{R},L^2)\times C^1(\mathbb{R},L^2))$ *es solución de (2.6), es decir,* $(u,v)\in C(\mathbb{R},H^{s+3})\times C(\mathbb{R},H^{s+3})$ *es solución de (2.7) si* $(u,v)\in C^1(\mathbb{R},L^2)\times C^1(\mathbb{R},L^2)$ *y*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u(t)+\partial_x^3 u(t)=F(u,v,\partial_x u,\partial_x v)(t),\\ \partial_t v(t)+\partial_x^3 v(t)=G(u,v,\partial_x u,\partial_x v)(t), \end{array}\right. \tag{2.10}$$

se cumplen para todo t.

(ii) $(u,v)\in C(\mathbb{R},H^{s+3})\times C(\mathbb{R},H^{s+3})$ *resuelve a*

$$\left\{\begin{array}{l} u(t)=U(t)u(0)\ -\int_0^t U(t-t')F(u,v,\partial_x u,\partial_x v)(t')dt', \\ \\ v(t)=U(t)v(0)\ -\int_0^t U(t-t')G(u,v,\partial_x u,\partial_x v)(t')dt', \end{array}\right. \tag{2.11}$$

Prueba. Aprovechando la simetría del sistema, se debe probar el principio de Duhamel's sólo para una de las ecuaciones del sistema. Siendo esta prueba un argumento estandar. ∎

Observemos que este principio de Duhamel's puede adaptarse para problemas de Cauchy, si imponemos a (2.10) dos condiciones iniciales y entonces en (2.11) las expresiones $u(0)$ y $v(0)$ deben ser sustituidas por las condiciones impuestas.

2.2. Estimaciones preliminares. Ahora presentamos las estimaciones que serán utilizadas para probar nuestro teorema principal de buena colocación.

Consideremos el operador $\phi(D)$ definido como

$$\left\{\begin{array}{l} \phi(D)=\mathcal{F}^{-1}\phi(\xi)\ \mathcal{F} \\ \mathcal{D}(\phi(D))=\{f\in H^s(\mathbb{R}):\phi(\xi)\mathcal{F}(f)\in H^s(\mathbb{R})\},\, s\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

con dominio $\mathcal{D}(\phi(D))\subset H^s(\mathbb{R})$ denso. Supongamos que la acción del grupo unitario

$$(U_\phi(t))_{t\in\mathbb{R}}=(e^{it\phi(D)})_{t\in\mathbb{R}}$$

de operadores en $L(H^s(\mathbb{R}))$ generado por $\phi(D)$ esta dada por

$$\mathcal{F}[U_\phi(t)f](\xi)=e^{it\phi(\xi)}\widehat{f}(\xi) \quad \text{con} \quad f\in H^s(\mathbb{R}) \tag{2.12}$$

Entonces veamos algunas propiedades importantes que tiene este grupo unitario $U_\phi(t)$. Si $\psi_1\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0\le\psi_1(t)\le 1$ es una función cut-off dada por

$$\psi_1(t)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & , & \text{si}\quad |t|<1 \\ 0 & , & \text{si}\quad |t|\ge 2 \end{array}\right. \tag{2.13}$$

y si definimos $\psi_\delta(t)=\psi_1(t/\delta)$ para $0<\delta\le 1$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi_\delta(t)U_\phi(\pm t)f\,](\xi,\tau) &= \mathcal{F}[\mathcal{F}\{\psi_\delta(t)U_\phi(\pm t)f\}(\xi)](\tau) \\ &= \mathcal{F}[\psi_\delta(t)\mathcal{F}\{U_\phi(\pm t)f\}(\xi)](\tau) \\ &= \mathcal{F}[\psi_\delta(t)\ e^{\pm it\phi(\xi)}\widehat{f}(\xi)](\tau) \\ &= \mathcal{F}[e^{\pm it\phi(\xi)}\psi_\delta(t)](\tau)\widehat{f}(\xi) \\ &= \widehat{\psi_\delta}(\tau\mp\phi(\xi))\widehat{f}(\xi). \end{aligned} \tag{2.14}$$

∎

Otra propiedad que se obtiene como consecuencia de la anterior es la siguiente.

$$\|\psi_\delta(t)U_\phi(-t)f\|_{H^{s,b}}=\|\langle\ \xi\rangle^s\langle\ \tau\rangle^b\mathcal{F}[\psi_\delta(t)U_\phi(-t)f]\ \|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\langle\, \xi\rangle^s \langle\, \tau\rangle^b \widehat{\psi_\delta}(\tau+\phi(\xi))\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\langle\, \xi\rangle^s \langle\, \tau-\phi(\xi)\rangle^b\, \widehat{\psi_\delta}(\tau)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\langle\, \xi\rangle^s \langle\, \tau-\phi(\xi)\rangle^b\, \widehat{\psi_\delta f}\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\psi_\delta f\|_{X_{s,b}}.$$

■

Ahora, si suponemos que $u = u(x,t)$ es solución de

$$\partial_t u(x,t) - i\phi(D)u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x) \tag{2.15}$$

entonces aplicando la transformada de Fourier espacial a las dos igualdades anteriores y luego multiplicando por $e^{-it\phi(\xi)}$ solo a la primera igualdad tenemos

$$\partial_t\widehat{u}(\xi,t)e^{-it\phi(\xi)} - i\phi(\xi)\widehat{u}(\xi,t)e^{-it\phi(\xi)} = 0, \quad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)$$

$$\text{o} \quad \partial_t(\widehat{u}(\xi,t)e^{-it\phi(\xi)}) = 0, \quad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)$$

$$\text{o} \quad \widehat{u}(\xi,t)e^{-it\phi(\xi)} = \widehat{f}(\xi)$$

$$\text{o} \quad \widehat{u}(\xi,t) = e^{it\phi(\xi)}\widehat{f}(\xi)$$

Luego, (2.12) implica

$$\widehat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}[U_\phi(t)f](\xi)$$

■

Tenemos, por tanto, otra propiedad relacionada con el problema de valor inicial asociado al operador $\phi(D)$ y dato inicial f. La solución de (2.15) es dada por $u(x,t) = U_\phi(t)f(x)$, donde el grupo unitario $U_\phi(t)$ es definido por (2.12). Además, la siguiente proposición nos brinda una estimación para estas soluciones.

Proposición 2.5. *Si $s \in \mathbb{R}$, $b \in (1/2,1)$ y $\delta \in (0,1)$ entonces las soluciones $u(t) = U_\phi(t)f$ del problema de Cauchy lineal homogéneo*

$$\partial_t u - i\phi(D)u = 0, \quad u(0) = f$$

verifican la siguiente estimación

$$\|\psi_\delta(t)\, U_\phi(t)f\|_{X_{s,b}} \le C\delta^{(1-2b)/2}\|f\|_{H^s}$$

donde $\psi_\delta(t) = \psi_1(t/\delta)$, para $0 < \delta \le 1$, y ψ_1 es una función cut-off diferenciable que verifica (2.13).

Prueba. Por (2.14),

$$\|\psi_\delta(t)\, U_\phi(t)f\|_{X_{s,b}} = \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^b\mathcal{F}[\psi_\delta(t)\, U_\phi(t)f]\,\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^b\,\widehat{\psi_\delta}(\tau-\phi(\xi))\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau\rangle^b\,\widehat{\psi_\delta}(\tau)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau\rangle^b\,\widehat{\psi_\delta}(\tau)\widehat{f}(\xi)\|L^2_{\xi,\tau}$$

$$= \|\langle\tau\rangle^b\,\widehat{\psi_\delta}\|_{L^2_\tau}\|\langle\xi\rangle^s\widehat{f}\|_{L^2_{\xi,\tau}}$$

$$= \|\psi_\delta\|_{H^b}\|f\|_{H^s}.$$

Luego, la estimación deseada se sigue de $\|\psi_\delta\|_{H^b}\leq C\delta^{(1-2b)/2}\|\psi_1\|_{H^b}$. ■

Ahora, damos, en las siguientes proposiciones, otras estimaciones que serán usadas para probar el resultado principal de buena colocación.

PROPOSICIÓN 2.6. *Si $s\in\mathbb{R}$, $b\in(1/2,1)$ y $\delta\in(0,1)$ entonces para el problema de Cauchy lineal no homogéneo*

$$\partial_t u(t)-i\phi(D)u(t)=F(t),\quad u(0)=0$$

tenemos la estimación

$$\|\psi_\delta(t)\int_0^t U_\phi(t-t')F(t')\,dt'\|_{X_{s,b}}\leq C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X_{s,b-1}} \tag{2.16}$$

donde $\psi_\delta(t)=\psi_1(t/\delta)$, para $0<\delta\leq1$, y ψ_1 es una función cut-off diferenciable que verifica (2.13).

Prueba. Se encuentra en [13, sección 3], nosotros la demostraremos suponiendo que la estimación para $Kg(t)=\psi_\delta(t)\int_0^t g(t')dt'$ es

$$\|Kg\|_{H^{s,b}}\leq C\delta^{(1-2b)/2}\|g\|_{H^{s,b}}.$$

Para establecer (2.16), sea entonces $g(t)=U_\phi(-t)F(t)$. De esto se obtiene

$$\|\psi_\delta(t)\int_0^t U_\phi(-t')F(t')dt'\|_{H^{s,b}}\leq C\delta^{(1-2b)/2}\|U_\phi(-t)F(t)\|_{H^{s,b}}.$$

Observemos que podemos escribir $U_\phi(-t')=U_\phi(-t)U_\phi(t-t')$, también para $h=h(x,t)$ tenemos

$$\|\psi_\delta(t)\,U_\phi(-t)h(x,t)\|_{H^{s,b}}=\|\psi h\|_{X_{s,b}}$$

y similarmente

$$\|U_\phi(-t)h(x,t)\|_{H^{s,b}}=\|h\|_{X_{s,b}}.$$

Luego, entonces

$$\|\psi_\delta(t)U_\phi(-t)\int_0^t U_\phi(t-t')F(t')dt'\|_{H^{s,b}}\leq C\delta^{(1-2b)/2}\|U_\phi(-t)F(t)\|_{H^{s,b}}$$

$$\|\psi_\delta(t)\int_0^t U_\phi(t-t')F(t')dt'\|_{Xs,b} \leq C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X_{s,b-1}}$$

■

PROPOSICIÓN 2.7. *Sea $s \in \mathbb{R}$, $b', b \in (1/2, 1)$ con $b' < b$ y $\delta \in (0,1)$ entonces tenemos*

$$\|\psi_\delta F\|_{X_{s,b-1}} \leq C\delta^{(b-b')/8(1-b')}\|F\||_{X_{s,b-1}} \tag{2.17}$$

y

$$\|\psi_\delta(t)\int_0^t U_\phi(t-t')F(t')\,dt'\|_{H^s} \leq C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X_{s,b-1}} \tag{2.18}$$

donde $\psi_\delta(t) = \psi_1(t/\delta)$, para $0 < \delta \leq 1$, y ψ_1 es una función cut-off diferenciable que verifica (2.13).

Prueba. La prueba de este lema se encuentra en [13]. ■

PROPOSICIÓN 2.8. *Si $s > -3/4$, entonces existe $1/2 < b < 1$ tal que la siguiente estimación bilineal es valida*

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_{s,b-1}} \leq C\|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}.$$

Prueba. Ver [13]. ■

2.3. Prueba del resultado principal. El objetivo de esta sección es dar la prueba del teorema [1.1], utilizando los resultados presentados en las secciones anteriores.

Prueba. Dado el dato inicial (η, μ) en $H^s(\mathbb{R})\times\ H^s(\mathbb{R})$ con $s > 1/2$, definimos el conjunto

$$\mathcal{H}_{\eta\mu} := \{(u,v) \in X_{s,b} \times X_{s,b} : \|u\|_{X_{s,b}} \leq 2C_0\|\eta\|_{H^s}, \|v\|_{X_{s,b}} \leq 2C_0\|\mu\|_{H^s}\}$$

y la métrica

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{H}_{\eta\mu}} := \|u\|_{X_{s,b}} + \|v\|_{X_{s,b}}$$

que hace a $\mathcal{H}_{\eta,\mu}$ un espacio métrico completo.

Estamos interesados en resolver localmente el sistema (2.7) sujeto a las condiciones $u(0) = \eta$ y $v(0) = \mu$. Entonces, adaptando el principio de Duhamel's (proposición 2.4) tanto a las condiciones iniciales asi como a los eapacios $X_{s,b}$, resulta adecuado buscar soluciones en el espacio $\mathcal{H}_{\eta\mu}$. Definimos, por tanto, para $(u,v) \in \mathcal{H}_{\eta\mu}$ la aplicación $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$ como

$$\begin{cases} \Phi_\eta(u,v)(t) := \psi_1(t)U(t)\eta\ -\psi_1(t)\int_0^t U(t-t')\psi_\delta(t')F(u,v,\partial_x u,\partial_x v)(t')dt', \\ \\ \Psi_\eta(u,v)(t) := \psi_1(t)U(t)\mu\ -\psi_1(t)\int_0^t U(t-t')\psi_\delta(t')G(u,v,\partial_x u,\partial_x v)(t')dt'. \end{cases}$$

En lo que sigue, probaremos que $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$ aplica $\mathcal{H}_{\eta\mu}$ en $\mathcal{H}_{\eta\mu}$, es decir, el rango de $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$ está en $\mathcal{H}_{\eta\mu}$:

$$\mathcal{R}(\Phi_\eta \times \Psi_\mu) = [\Phi_\eta \times \Psi_\mu](\mathcal{H}_{\eta\mu}) \subseteq \mathcal{H}_{\eta\mu}.$$

Aprovechando la simetría de las funciones componentes que definen a $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$, estimaremos solo la primera componente de $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$. Las estimaciones para la segunda componente son similares. Usando las proposiciónes 2.5 y 2.6, para el caso particular en que $\phi(D) = D^3 = (-i\partial_x)^3$ y la condición inicial en el problema de Cauhy homgéneo tomada como $u(0) = \eta$, obtenemos de la primera componente de $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$:

$$\|\Phi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le C_0\|\eta\|_{H^s} + C\|\psi_\delta F(u,v,\partial_x u,\partial_x v)\|_{X_{s,b-1}} \tag{2.19}$$

Ahora, usando la desigualdad (2.17), obtenemos de (2.19) para $b' < b$ y $\theta = \frac{b-b'}{8(1-b')}$:

$$\|\Phi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le C_0\|\eta\|_{H^s} + C\delta^\theta\|F(u,v,\partial_x u,\partial_x v)\|_{X_{s,b'-1}} \tag{2.20}$$

Uando la proposición 2.8 y la igualdad (2.8), obtenemos de la estimación (2.20):

$$\|\Phi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le C_0\|\eta\|_{H^s} + C_1\delta^\theta\{\|u\|^2_{X_{s,b}} + \|v\|^2_{X_{s,b}} + \|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}\} \tag{2.21}$$

Similarmente, por la simetria existente, obtenemos para la segunda componente

$$\|\Psi_\mu(u,v)\|_{X_{s,b}} \le C_0\|\mu\|_{H^s} + C_2\delta^\theta\{\|u\|^2_{X_{s,b}} + \|v\|^2_{X_{s,b}} + \|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}\} \tag{2.22}$$

Como $(u,v) \in \mathcal{H}_{\eta\mu}$, con una elección de $M = 2C_0\|\eta\|_{H^s}$ y $N = 2C_0\|\mu\|_{H^s}$, obtenemos de (2.21) y (2.22)

$$\begin{cases} \|\Phi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le \frac{M}{2} + C_1\delta^\theta\{M^2+N^2+MN\} \\ \\ \|\Psi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le \frac{N}{2} + C_2\delta^\theta\{M^2+N^2+MN\}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Si elegimos δ tal que

$$\delta^\theta \le (2\max\{C_1,C_2\}(M+N)^2)^{-1}$$

entonces obtenemos de (2.23)

$$\|\Phi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le M = 2C_0\|\eta\|_{H^s}$$

y

$$\|\Psi_\eta(u,v)\|_{X_{s,b}} \le N = 2C_0\|\mu\|_{H^s}$$

Por tanto,

$$(\Phi_\eta(u,v), \Psi_\eta(u,v)) \in \mathcal{H}_{\eta\mu}.$$

Ahora, mostraremos que $\Phi_\eta \times \Psi_\mu : (u,v) \mapsto (\Phi_\eta(u,v), \Psi_\eta(u,v))$ es una contracción. Esto se demuestra, analogamente, que para un δ tal que

$$\delta^\theta \le (4\max\{C_1,C_2\}(M+N)^2)^{-1}$$

se cumple

$$\begin{cases} \|\Phi_\eta(u,v) - \Phi_\eta(u_1,v_1)\|_{X_{s,b}} \le \frac{1}{4}[\ \|u-u_1\|_{X_{s,b}} + \|v-v_1\|_{X_{s,b}}] \\ \\ \|\Psi_\eta(u,v) - \Psi_\eta(u_1,v_1)\|_{X_{s,b}} \le \frac{1}{4}[\ \|u-u_1\|_{X_{s,b}} + \|v-v_1\|_{X_{s,b}}]. \end{cases} \tag{2.24}$$

Por tanto, la aplicación $\Phi_\eta \times \Psi_\mu$ es una conytracción y obtenemos un único punto fijo (u,v) que resuelve el problema de cauchy asociado al sistema (2.7) para $t \in [-T,T]$ con $T \le \delta$. El resto de la prueba sigue con un argumento estandar.

3. Resultados. Luego de hacer un estudio detallado del tema de investigación titulado sobre el problema de Cauchy local para un Sistema Particular de ecuaciones de KdV, se obtuvieron los siguientes resultados:

1. Desacoplar, con la ayuda de la teoría de autovalores y autovectores, los términos dispersivos del sistema acoplado de ecuaciones de KdV. Obteniendose entonces el problema reducido.
2. La teoría de grupos de operadores lineales permitió enunciar el Principio de Duhamel's (o fórmula de variación de parametros) para las soluciones el problema reducido.
3. La noción de estimativas lineales y bilineales permitó mostrar que es una contracción la aplicación definida con la ayuda del principio de Duhamel's.
4. Utilizar técnicas modernas (como los espacios de Sobolev, teoria de distribuciones, tería de grupos, etc) para el análisis de ecuaciones.

4. Conclusiones. Al finalizar el presente trabajo, se infiere las siguientes conclusiones:

1. Se logro resolver el problema de valor inicial para el caso local en el producto de espacios de Burgain, demostrandose con el principio de contracción que el problema está bien puesto.
2. Los espacios de Burgain son un ambiente natural para analizar ciertas ecuaciones dipersivas no lineales.

REFERENCIAS

[1] Albert, J., and Linares, F., *Stability and symmetry of solitary-wave solutions modeling interactions of long waves.*, J. Math. Pure Appl., 79 (2000), 195-226.

[2] Ash, J., Cohen and Wang, G., *On strongly interacting internal solitary waves.*, J. Fourier Anal. Appl., 5 (1996), 507-517.

[3] Bisognin, E., Bisognin, V., and Menzala, G.P., *Exponential stabilization of a coupled system of Korteweg-de Vries equations with localized domping.*, Adv. Diff, Eqn., 8 (2003), 443-469.

[4] Bona, J., and Chen, H., *Solitary waves in nonlinear dispersive systems.*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2 (2002), 313-378.

[5] Bona, J., Ponce, G., Saut, J-C., and Tom M., *A model system for strong interactions between internal solitary waves.*, Comm. Math. Phys., 143 (1992), 287-313.

[6] Bourgain, J., *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations.*, Geom. Funct. Anal., 3 (1993), 107-156, 209-262.

[7] Bourgain, J., *Periodic Korteweg-de Vries equation with measures as initial data.*, Sel. Math., New Ser., 3 (1997), 115-159.

[8] Bourgain, J., *Refinements of Strichartz inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity.*, Internat. Math. Res. Notices, 5 (1998), 253-283.

[9] Chirst, M., Colliander, J., and Tao T., *Asymptotics, frequency modulation and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations.*, Preprint (2002).

[10] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H., and Tao T., *Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index.*, Electron. J. Differential Equations, 26 (2001), 1-7.

[11] Gear, J.A., and Grimshaw, R., *Weak and strong interactions between internal solitary waves.*, Stud. Appl. Math., 70 (1984), 235-258.

[12] Kenig, C.E., Ponce, G., and Vega, L., *Well-posedness and scattering result for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.*, R.I, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 527-620.

[13] Kening C.E., Ponce G. and Vega L., *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negatives indices.*, Duke Math. J., 71 (1993), 1-21.

[14] Kenig, C.E., Ponce, G., and Vega L., *A bilinear estimate with application to the KdV equation.*, J. Amer. Math Soc., 9 (1996), 573-603.

[15] Menzala, G.P., Vasconcellos, C.F., and Zuazua E., *Menzala G.P., Vasconcellos C.F. and Zuazua E.*, Quart. Appl. Math., 60 (2002), 111-129.

[16] Nakanishi, K., Takaoka, H., and Tsutsumi Y., Counterexamples to bilinear estimates related with the KdV equation and nonlinear Schrödinger equation., IMS Conference on Differential Equations from Mechanics (Hong Kong, 1999), Methods Appl. Anal., 8 (2001), 569-578.

[17] Saut, J-C., and Tzvetkov, N., On a model system for the oblique interaction of internal gravity waves., Math Modelling and Numerical Anal., 36 (2000), 501-523.

[18] Staffilani, G., On the growth of high Sobolev norms of solutions for KdV and Schrödinger equations., Duke Math. J., 86 (1997), 109-142.

[19] Takaoka, H., Global well-posedness for Schrödinger equations with derivate in a nonlinear tern and data in low-order Sobolev spaces., Electronic Jr. Diff, Eqn., 42 (2001), 1-23.

[20] Tzvetkov, N., Remark on the local ill-posedness for KdV equation, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. 1, 329 (1999), 1043-1047.