UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN-2017

PERSONAL INVESTIGADOR:

	Cod	**Cat/Mod**
Prof. Delgado Vásquez, Rosario Diómedes	2743	Asoc. DE
Prof. Barreto Vega Waymer Alfonso	2746	Asoc. DE
Prof. Acevedo Tenorio Teodoro Luis	2747	Asoc. DE

1. TITULO: "**CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE EQUILIBRIO FINANCIERO**"

2. RESUMEN

En este trabajo se establece las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del equilibrio, en una economía de dos periodos en la que los individuos intercambian activos cuyos retornos dependen de un cierto estado de la naturaleza. Para esto nos apoyaremos Hammond y Page que han formulado otras condiciones, equivalentes a las que se aplican a este modelo.

3. ABSTRAC

This paper establishes the necessary and sufficient conditions for the existence of equilibrium, in a two-period economy in which individuals exchange assets whose returns depend on a certain state of nature. For this, we will support Hammond and Page who have formulated other conditions, equivalent to those that apply to this model.

4. INTRODUCCIÓN

Existen en la economía diversos mecanismos a través de los cuales es posible transferir recursos en el tiempo, múltiples sistemas de ahorro y de endeudamiento que le permiten a los individuos distribuir sus ingresos entre distintos periodos y diversificar el riesgo, frente a la posibilidad de que ocurran sucesos que puedan afectar sus niveles de riqueza y consumo. En el mercado financiero, por ejemplo, se intercambian activos cuyo valor futuro está sujeto a innumerables contingencias, usualmente difíciles de anticipar. Por esta razón, la incertidumbre juega un papel determinante en el comportamiento de los agentes que participan en este mercado. Si bien es cierto que los individuos no pueden prever fácilmente el valor futuro o los dividendos de los activos, también es claro que disponen de distintas fuentes de información en virtud de las cuales pueden formar expectativas, acertadas o no, sobre dichos retornos, independientemente de cual sea la verdadera distribución de probabilidad de los eventos que determinan el valor de los activos, incluidos sus dividendos, las probabilidades subjetivas que los individuos les asignan, con base en la información previamente adquirida y en posibles señales que reciben del mercado, permiten modelar su comportamiento bajo las condiciones de incertidumbre descritas y analizar así algunas características de este mercado.

En este trabajo se pretende examinar algunas condiciones relativas a las expectativas de los individuos sobre los retornos futuros de los activos, que determinan la existencia del equilibrio en el mercado financiero.

El modelo que se propone para dicho fin, aunque es muy similar al de Hart (1974), incluyen un término en la función de utilidad de los individuos que depende del excedente de riqueza disponible, luego de haber realizado las transacciones en el mercado de activos.

En términos generales, podría decirse que el objetivo de este trabajo es mostrar que la inclusión de este término adicional en la función de utilidad no es inocua. Más específicamente, se demostrará, por medio de un contra ejemplo, que en una economía idéntica a la propuesta por Hart (1974) y Hammond (1983), excepto porque en esta los individuos valoran el consumo presente, la condición de expectativas traslapadas de Hammond no es suficiente para la existencia del equilibrio.

Puntualmente, el trabajo que se desarrolla a continuación se concentra en los siguientes aspectos: Primero se plantea un modelo similar al de Hart (1973), pero se le añade un término adicional a la función de utilidad, siguiendo a Carvajal y Riascos (2006), para incorporar en el modelo la utilidad inicial que los individuos obtienen de la riqueza que no destinan a la compra de activos o, incluso, que obtienen de la venta de éstos. Luego se propone una condición necesaria para la existencia del equilibrio, que es una generalización de la condición que proponen Carvajal y Riascos (2006) para una economía conformada por dos agentes, y se demuestra que es equivalente a las respectivas condiciones de Hart (1973) y Hammond (1983).Una vez establecidas dichas equivalencias, se demuestra que la condición de expectativas traslapadas no es suficiente para la existencia del equilibrio en una economía en la que la utilidad en el primer periodo es relevante. Finalmente, se demuestra la existencia del equilibrio en la economía propuesta, imponiendo algunos supuestos adicionales. La prueba en cuestión generaliza la propuesta por Carvajal y Riascos (2006) en varios aspectos importantes, a saber, se cumple para una economía con más de dos agentes, un conjunto infinito de estados de la naturaleza y expectativas sobre los retornos que permiten asignarle una probabilidad positiva al hecho de que los retornos de algunos activos puedan ser iguales a cero.

Existen modelos de intercambio de activos que no ha sido considerado con suficiente detalle en la literatura. Considerar explícitamente el valor que los individuos otorgan al consumo en el primer periodo, introduce diferencias cruciales en el modelo que modifican las condiciones bajo las cuales existe el equilibrio en la economía. Incluso en los casos en que estas condiciones coinciden, dado un conjunto de supuestos adicionales, la aplicación para el caso que aquí nos concierne no es trivial y exige modificar las pruebas sustancialmente. Más aún, existen ejemplos, donde se aprecia la debilidad para existencia del equilibrio deseado y se justifica la necesidad de incluir la modificación propuesta para incorporar la utilidad inicial. Cuando menos, estos ejemplos cumplen la función de hacer explícitos otros supuestos sin los cuales no existe el equilibrio en el mercado de activos.

PROBLEMA

¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un equilibrio financiero?

5. MATERIAL Y MÉTODO

No experimental- Transversal-Descriptivo.

En el presente trabajo utilizaremos los métodos deductivo-inductivos, analíticos y sintéticos. El método deductivo-inductivo nos permitirá iniciar la investigación a partir del modelo de intercambio de valores de Hart (1974), hasta el modelo, donde los individuos están interesados en su consumo presente, y no solamente en la utilidad esperada de la riqueza.

6. RESULTADOS

6.1 El Modelo

La economía en estudio, $\mathcal{E}$, consta de dos periodos, en el primero se realizan transacciones de activos y en el segundo estos activos pagan cierto retorno.

a) Existen un número finito de individuos y de activos:

$$\mathcal{I} = \{1,2,3,\cdots,I\}$$
$$\mathcal{A} = \{1,2,3,\cdots,A\}$$

En el segundo periodo ocurre uno de infinitos estados de la naturaleza posibles, cada uno de los cuales se identifica con un único vector de retorno para los A activos de la economía. Adicionalmente, se supone que dichos retornos son no negativos (es un elemento de $\mathbb{R}^A_+$).

b) Una canasta de activos se denomina ***portafolio*** y se representa por medio de un vector $z \in \mathbb{R}^A$. La expresión $z^i_a < 0$ significa que el individuo i demanda cantidades negativas del activo a, es decir, que está interesado en irse corto en este activo.

c) Para cada $i \in \mathcal{I}$, se le asocia su función de utilidad, $u^i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface

A. u^i es cóncava

B. u^i es estrictamente creciente.

Los individuos maximizan la suma de la utilidad presente del consumo de un único bien (riqueza) y el valor esperado de la utilidad por el consumo futuro de dicho bien. La riqueza en el segundo periodo depende de los retornos de los activos adquiridos en el primer periodo y, de manera correspondiente, la utilidad esperada por dicha riqueza, para un individuo cualquiera, está determinado por su precio real, sobre los retornos futuros de estos activos.

d) Sea $p \in \mathbb{R}_+^A$ un vector de precios para los activos, $r \in \mathbb{R}_+^A$ un vector de retornos, o un estado de la naturaleza.

e) $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^A)$: la σ- álgebra boreliana en $\mathbb{R}_+^A$.

f) $M(\mathbb{R}_+^A)$: el conjunto de todas las medidas de probabilidad definidas en el espacio medible $(\mathbb{R}_+^A, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^A)\ )$.

g) Las creencias de cada individuo $i \in \mathcal{I}$ sobre los retornos de los activos está caracterizado por medio de un función $\mu^i: \mathbb{R}_+^A \ \to \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^A)$, tal que $\mu^i(p, X)$ denota la probabilidad que le asigna i al hecho de que el vector de retornos de los activos r esté contenido en el conjunto X, dados los precios p en el primer periodo. Se supone μ^i satisface los siguientes supuestos:

C. Para todo $p \in \mathbb{R}_+^A$, existe un conjunto acotado $C \subseteq \mathbb{R}_+^A$ tal que $\mu^i(p, C) = 1$.

D. Para todo $i \in \mathcal{I}$, la función $\mu^i: \mathbb{R}_+^A \ \to \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^A)$ es continua en la topología de convergencia débil de medidas de probabilidad.

Aunque la economía en cuestión consta de dos periodos, Hart (1974) supone que la utilidad de los individuos depende únicamente de su riqueza en el segundo periodo. Aquí, en cambio, se añade a la utilidad esperada un término que representa la utilidad derivada de la riqueza restante en el primer periodo, después de haber realizado las transacciones de activos. Adicionalmente, se supone en este modelo que cada individuo i recibe dotaciones iniciales de riqueza positivas w_i^1 y w_i^2 en el primer y segundo periodo respectivamente. Así dado un vector $p \in \mathbb{R}^A$ en el primer periodo, el individuo i escoge un portafolio de activos $z = (z_1, z_2, \cdots, z_m) \in \mathbb{R}^A$ con el fin de maximizar la función,

$$V^i(z,p) = u^i\left(w_1^i - pz\right) + \int u^i\left(w_2^i + rz\right) d\mu^i(p) \qquad (1)$$

h) Las elecciones de los agentes están sujetas a ciertas restricciones. En particular, a los precios p, la restricción presupuestal del individuo i está determinada por el conjunto:

$$B^i(p) = \left\{z \in \mathbb{R}^A : w_1^i - pz \geq 0\ \right\} \qquad (2)$$

i) Se define el conjunto de portafolios factibles para el individuo i, a los precios p, como:

$$X^i(p) = \left\{z \in \mathbb{R}^A:\ \forall rz \in S^i(p):\ rz + w_2^i \geq 0\right\} \qquad (3)$$

Donde $S^i(p)$ es el soporte de la medida de probabilidad $\mu^i(p)$.

En resumen, el problema de cualquier agente i de esta economía consiste en escoger un z en $B^i(p) \cap X^i(p)$ que maximice el valor de la función $V^i(.,p)$, tomando los precios p como dados. Por lo tanto, puede definirse la correspondencia de demanda individual, $Z^i(p) = \underbrace{\arg max}_{z \in B^i(p) \cap X^i(p)} V^i(z,p)$.

7. ANALISIS Y DISCUSIONES

7.1 Demandas individuales

Para evitar que la demanda individual sea vacía, consideramos,

Lema 1. $Z^i(p) \neq \emptyset$ si y solo si se cumple las siguientes condiciones:

i) No existe un $z \in \mathbb{R}^A$ tal que $pz < 0$ y $\mu^i(p, \{r: rz < 0\}) = 0$ y
ii) No existe un $z \in \mathbb{R}^A$ tal que $pz = 0$, $\mu^i(p, \{r: rz < 0\}) = 0$ y $\mu^i(p, \{r: rz > 0\}) > 0$

Proposición 1. Sea $K \subset \mathbb{R}^A$ un cono convexo cerrado y $k \in K^+$, entonces existe un $z \in K$ tal que $z \neq 0$ y $kz = 0$ si y solo si $k \in \partial K^+$, donde $\partial K^+ = clK^+ \setminus intK^+$ es la frontera de K^+ y clK^+ denota la clausura de K^+.

Demostración

$\Longrightarrow$) Suponga existe un $z \in K$ tal que $z \neq 0$ y $kz = 0$, entonces existe un n tal que $z_n \neq 0$. Sea $\hat{k}^\delta$ definido por $\hat{k}_i^\delta = k_i - \delta$, si $i = n$ y $z_i > 0$, $\hat{k}_i^\delta = k_i + \delta$, si $i = n$ y $z_i < 0$ y $\hat{k}_i^\delta = k_i$ si $i \neq n$. Claramente $\hat{k}_i^\delta = kz \pm \delta z_i < 0$, por lo cual $\hat{k}^\delta \notin K^+$, para todo $\delta > 0$. Por lo tanto $k \in \partial K^+$.

$\Longleftarrow$) Sea $k \in \partial K^+$y que para cada $z \in K$, si $z \neq 0$ entonces $zk > 0$. Entonces, como $k \notin intK^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, existe un $\hat{k}^n \in B_{\frac{1}{n}}(k) = \left\{x \in \mathbb{R}^A : \|x - k\| > \frac{1}{n}\right\}$, tal que $\hat{k}^n \notin K^+$. Como $\hat{k}^n \notin K^+$, existe un $z^n \in K$ tal que $\hat{k}^n z^n < 0$, más aún, para todo $\lambda > 0$, $\hat{k}^n(\lambda z^n) < 0$, por lo tanto z^n puede converger de tal forma que $\varepsilon \leq \|z^n\| \leq \varepsilon + 1$, donde ε es un número positivo arbitrario. Es claro que $\hat{k}^n \to k$ y, por construcción, la sucesión (z^n) está contenida en un compacto, por lo cual existe una subsucesión convergente (z^{n_i}), tal que $z^{n_i} \to z$, para algún $z \in K$. De lo anterior se sigue que $\hat{k}^{n_i} z^{n_i} \to kz$, lo cual es imposible porque $kz > 0$ y $\hat{k}^{n_i} z^{n_i} < 0$ para todo i. En conclusión, si $k \in \partial K^+$, existe un $z \neq 0$ en K tal que $kz = 0$.

Teorema 1. Si para todo $i \in \mathcal{J}$ y todo $p \in \mathbb{R}_+^A$, $intK^i(p) \neq \emptyset$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $Z^i(p) \neq \emptyset$
2. Las condiciones i) y ii) del lema 1 se cumplen a los precios p.
3. $p \in intK^i(p)$

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es el lema 1.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Sea $z \in K^i(p)^+$, que es un cono convexo cerrado. Si $pz < 0$, la condición (i) del lema 1 implica que $\mu^i(p, \{r: rz < 0\}) > 0$, es decir, existe un $r \in S^i$ tal que $rz < 0$, luego $z \notin K^i(p)^+$, por lo tanto $pz \geq 0$, por tanto $p \in K^i(p)^+ = clK^i(p)$. Si $pz = 0$ y $z \in K^i(p)^+$, por condición (ii) del lema 1, $\mu^i(p, \{r: rz > 0\}) = 0$, es decir, para todo $r \in S^i$, $rz \leq 0$, y así, para todo $z \in K^i(p)$, $kz = 0$. Sin embargo, por hipótesis del teorema 1, $intK^i(p) \neq \emptyset$, además como $intK^i(p) = int\left(K^i(p)^{++}\right)$, entonces existe $\hat{k} \in int\left(K^i(p)^{++}\right)$ y la proposición 1 implica que para todo $z \in K^i(p)^+$, si $z \neq 0$ entonces $kz > 0$, lo cual contradice una afirmación anterior.

(3) $\Longrightarrow$ (1) En primer lugar demostraremos que para $p \in K^i(p)$, $X^i(p) \cap B^i(p)$ es compacto. Es claro que $X^i(p)$ y $B^i(p)$ son cerrados y convexos, porque el primero es la intersección de los semiespacios superiores cerrados determinados por los hiperplanos de la forma $rz = -w$, para $r \in S^i$, y el segundo es el semiespacio inferior cerrado determinado por el hiperplano $zp = -w_0$, por lo tanto $X^i(p) \cap B^i(p)$ también es cerrado y convexo.

Es evidente que $0 \in X^i(p) \cap B^i(p)$, y como este conjunto es cerrado y convexo, entonces es acotado si y solo si su única dirección de recesión es 0. Con el fin de obtener una contradicción, suponga que $e \neq 0$ es una dirección de recesión de $X^i(p) \cap B^i(p)$, entonces, es obvio que e es una dirección de recesión de $X^i(p)$ y $B^i(p)$, por lo tanto $zp + \lambda ep \leq -w_0$ para todo $z \in B^i(p)$ y todo $\lambda > 0$, luego $ep \leq 0$. Además como e es una dirección de recesión de $X^i(p)$ es fácil verificar que e también es una dirección de recesión de $K^i(p)^+$, es decir, si $zk \geq 0$ par todo $k \in K^i(p)$ entonces $(z + \lambda e) \geq 0$ para todo $\lambda > 0$, por lo cual, $ek \geq 0$ para todo $k \in K^i(p)$ y entonces $e \in K^i(p)^+$, en particular, $ep \geq 0$, por que $p \in intK^i(p)$. Luego $ep = 0$ y como $intK^i(p) = int\left(K^i(p)^{++}\right)$ la proposición 1 implica que $p \in \partial K^i(p)^{++}$ lo cual es imposible. En conclusión, $X^i(p) \cap B^i(p)$ no tiene dirección de recesión distinta de cero, por lo tanto es acotada.

Como la función de utilidad V^i es continua en el conjunto compacto $X^i(p) \cap B^i(p)$, alcanza un máximo en dicho conjunto, es decir, a los precios p existe una solución al problema de maximización del agente i, luego $Z^i(p) \neq \emptyset$.

7.2 Condiciones necesarias para el equilibrio

Definición 1. $\langle z, p \rangle \in \mathbb{R}^{AI} \times \mathbb{R}^A_+$ es un equilibrio para la economía $\mathcal{E}$ si:

1. $z^i \in Z^i(p)$ para todo $i \in \mathcal{I}$
2. $\sum_{i=1}^{I} z^i = 0$.

Definición 2. Las creencias de j son compatibles de forma restringida con las de i si no existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $\mu^i(\{r: rz > 0\}) > 0$ y $\mu^j(\{r: r(-z) < 0\}) = 0$.

Definición 3. A los precios $p \in \mathbb{R}_+^A$, las creencias de los agentes son compatibles de forma restringida si no existe un $z \in \mathbb{R}^{AI}$ tal que:

1. $\sum_{i=1}^{I} z^i = 0$
2. $\mu^j\left(\{p: rz^j < 0\}\right) = 0$, para todo $j \in \mathcal{I}$.
3. $\mu^j\left(\{p: rz^i > 0\}\right) > 0$ para algún $i \in \mathcal{I}$.

Proposición 2. Si $\langle z, p \rangle \in \mathbb{R}^{AI} \times \mathbb{R}_+^A$ es un un equilibrio para esta economía, entonces las creencias de los individuos son compatibles de forma restringida a los precios p.

Demostración

Este resultado es una consecuencia inmediata del lema 1.

Definición 4. A los precios $p \in \mathbb{R}_+^A$, se cumple las condiciones de Hart (1974) si no existe un $z \in \mathbb{R}^{AI}$ tal que:

(H.1) $\sum_{j=1}^{I} z^j = 0$

(H2) z^j es una dirección de recesión de $X^i(p)$ y $\widehat{S_J}^+ E_z^{+j}(p) + \widehat{S_J}^- E_z^{-j}(p) \geq 0$, para todo j.

(H3) $\mu^i\left(\{p: rz^i = 0\}\right) < 1$ para algún i.

Donde

$\widehat{S_J}^+ E_z^{+j}(p) = \lim\limits_{w\to\infty} \frac{du^j}{dw}$, $\widehat{S_J}^- E_z^{+j}(p) = \lim\limits_{w\to-\infty} \frac{du^j}{dw}$ y $E_z^{+j}(p) = \int_{\{r: rz \geq 0\}} rz d\mu^j(p)$ y $E_z^{-j}(p) = \int_{\{r: rz < 0\}} rz d\mu^j(p)$.

Observación 1.

Notar que, bajo nuestras definiciones de los conjuntos de portafolios factibles (3), la segunda parte de la condición (H2) es redundante.

Proposición 3. Dado un p fijo, $z \in \mathbb{R}^{AI}$ satisface (H1)-(H3) si y solo si cumple las condiciones 1, 2 y 3 de la definición 3. Es decir, las condiciones necesarias de Hart y la condición de compatibilidad restringida son equivalentes.

Demostración

Supongamos que existe un $z \in \mathbb{R}^{AI}$ que cumple (H1)-(H3), como $z^j \in {K^j}^+$, por lo tanto, para todo $r \in S^j$, $rz \geq 0$, lo cual implica que $\mu^j\left(\{r: re^j < 0\}\right) = 0$. Ahora bien, por (H3) existe un i tal que

$\mu^i(\{r: re^i = 0\}) < 1$, o en forma equivalente, existe $r \in S^i$ tal que $rz^i \neq 0$, como $z^i \in {K^j}^+$, entonces $rz^i > 0$ y se sigue que $\mu^i(\{r: rz^i > 0\}) > 0$.

Ahora supongamos que $z \in \mathbb{R}^{AI}$ cumple 1, 2 y 3 de la definición 3. Por la condición 2, sabemos que $\mu^j(\{p: rz^j < 0\}) = 0$, para todo $j \in \mathcal{J}$, por lo tanto, para todo $r \in S^j$, $re^j \geq 0$, es decir $e^j \in K_j^+$. Entonces, si $x \in X_j$, $r \in S_j$ y $\lambda \geq 0$, es claro que $r(x + \lambda e^j) + w_2^j \geq 0$, luego e^j es una dirección de recesión para X^j. Finalmente por la condición 3, existe un $i \in \mathcal{J}$ para el cual $\mu^i(\{r: rz^i > 0\}) > 0$, en particular $\mu_i(\{r: rz^i = 0\}) < 1$.

Definición 5. Se dice que los agentes de la economía tienen expectativas traslapadas en p si

$$\bigcap_{j \in \mathcal{J}} intK^j(p) \neq \emptyset$$

Proposición 4. Suponiendo que para todo $i \in \mathcal{J}$ y todo $p \in \mathbb{R}_+^A$, $intK^i(p) \neq \emptyset$, los agentes tienen expectativas traslapadas en p si y solo la economía satisface las condiciones necesarias de Hart.

Demostración (Hammmond, 1982)

Proposición 5. Suponiendo que para todo $i \in \mathcal{J}$ y todo $p \in \mathbb{R}_+^A$, $intK^i(p) \neq \emptyset$, los agentes tienen expectativas traslapadas en p si y solo si estas son compatibles en forma restringida.

Demostración

Esta equivalencia es una consecuencia inmediata de las proposiciones 3 y 4.

Proposición 6. Las condiciones de expectativas traslapadas es necesaria para la existencia del equilibrio en la economía $\mathcal{E}$.

Demostración

Esta equivalencia es una consecuencia inmediata de las proposiciones 5 y 2.

Corolario 1. Suponiendo que para todo $i \in \mathcal{J}$ y todo $p \in \mathbb{R}_+^A$, $intK^i(p) \neq \emptyset$, si $p \in \mathbb{R}_+^A$ es un vector de precios de equilibrio para la economía $\mathcal{E}$, entonces $p \in \bigcap_{j \in \mathcal{J}} intK^j(p)$.

Demostración

Basta observar que si $p \in \mathbb{R}_+^A$ es un vector de precios de equilibrio para la economía $\mathcal{E}$ entonces, por definición de equilibrio, $Z^j(p) \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathcal{J}$ y de esta manera el teorema 1 implica que $p \in \bigcap_{j \in \mathcal{J}} intK^j(p)$

7.3 Condiciones suficientes para la existencia del equilibrio

Definición 6. Se dice que las creencias del agente i excluyen el cero si $0 \notin S^i(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}_+^A$.

Observación 2.

Dado que el conjunto $S^i(p)$ es cerrado, se deduce inmediatamente de la definición anterior que las creencias del agente i excluyen el cero si solo si no existe una sucesión en $S^i(p)$ que converja a cero para todo $p \in \mathbb{R}_+^A$.

Lema 2. Sea $S \subset \mathbb{R}_+^A$, $w \in \mathbb{R}_{++}$ y $X = \{x \in \mathbb{R}^A\colon\ \forall r \in S,\quad rx + w \geq 0\}$. Si no hay una sucesión en S que converja a cero entonces existe un $v \in \mathbb{R}_+^A$ tal que $X + v \subseteq K^+$, donde K^+ el polar del cono convexo generado por S.

Demostración

Como $K^+ = \{x \in \mathbb{R}^A\colon\ \forall r \in S,\quad rx \geq 0\}$ y con el fin de obtener una contradicción, supóngase que no existe un $v \in \mathbb{R}_+^A$ tal que $X + v \subseteq K^+$, es decir, que para todo $v \in \mathbb{R}_+^A$ existen $x^v \in \mathbb{R}^A$ y $r^v \in S$ tales que $r^v(x^v + v) < 0$, por lo cual, $x^v + v \notin K^+$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ positivo, existen x^n y r^n tales que $r^n(x^n + \mathbf{1}n) < 0$ o en forma equivalente $r^n x^n < -n\sum_{i=1}^{A} r_i^n$, donde $\mathbf{1}$ es un vector de $\mathbb{R}^A$ con todas sus coordenadas iguales a 1, y cono $x_n \in X$ y $r_n \in S$, entonces $x_n r_n \geq -w$, por lo tanto $n\sum_{i=1}^{A} r_i^n < w$. Dado que la anterior desigualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye que $\sum_{i=1}^{A} r_i^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y como $r^n \in \mathbb{R}_+^A$ entonces $r^n \to 0$, lo cual contradice a la hipótesis de que no hay sucesiones en S que converjan a cero.

Teorema 2. Suponga que las creencias de todos los agentes no dependen de los precios de los activos, excluyen el cero y son compatibles en forma restringida, entonces existe el equilibrio competitivo.

Demostración

Sea $\mathcal{P} = \{P = (p_0, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^A\colon \sum_{\alpha=0}^{A} p_{\alpha=1} = 1\}$.

Para cada $k \in \mathcal{I}$, se define,

$$B_n^k = \mathcal{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^{A+1}$$

Donde

$$B_n^k(P) = \left\{ Z = (z_0, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^A\colon \begin{array}{c} p_0\big(w_0^k - z_0 \geq 0\big) \\ \forall r \in S^k, \qquad w^k + rz \geq 0 \\ 0 \leq z_0 \leq (n+1)w_0^k \\ \forall \alpha \in A, -n \leq z_\alpha \leq n \end{array} \right\}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathcal{I}$, $P \in \mathcal{P}$ fijos, se tiene que

- $Z = (0, \mathbf{0}) \in B_n^k(P)$, entonces $\in B_n^k(P) \neq \emptyset$.

- $B_1 = \{(z_0, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^A : p_0(w_0^k - z_0 \geq 0)\}$ es cerrado.
- $B_2 = \{(z_0, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^A : 0 \leq z_0 \leq (n+1)w_0^k \;\; y \;\; \forall \alpha \in A, -n \leq z_\alpha \leq n\}$ es compacto.
- $B_n^k(P)$ es hemicontinua superior e hemicontinua inferior.
- Definimos la correspondencia de demanda individual acotada,

$$Z_n^k : \mathcal{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^{A+1},$$

$$Z_n^k(P) = arg \underbrace{max}_{z \in B_n^k(P)} u^k(z_0) + \int u^k\left(w^k + rz\right) d\mu^k(p),$$

  $Z_n^k(P)$: es hemicontinua superior y de valores no vacíos, convexos y compactos.
- En $N_n = \left[0, (n+1)\sum_{k=1}^I w_0^k\right] \times [-In, In]^A$, definimos:

$$\Phi : \mathcal{P} \times N_n \rightrightarrows \mathcal{P} \times N_n$$

$$\Phi(P, \boldsymbol{z}) = \left(arg \underbrace{max}_{z \in B_n^k(P)} p_0 \left(z_0 - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) + pz \right) \times \left(\sum_{K01}^{I} Z_n^k(P) \right)$$

  La correspondencia Φ se puede representar como el producto $\Phi_z \times \Phi_p$, donde:

$$\Phi_z : N_n \rightrightarrows \mathcal{P} \;\; y \;\; \Phi_p : \mathcal{P} \rightrightarrows N_n$$

  Y

$$\Phi_z(\boldsymbol{z}) = arg \underbrace{max}_{z \in B_n^k(P)} p_0 \left(z_0 - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) + pz \;\; y \;\; \Phi_p(P) = \sum_{K01}^{I} Z_n^k(P)$$

  Dado que $\mathcal{P}$ es compacto y la función $\hat{g}(P, \boldsymbol{z}) = z_0 - \sum_{k=1}^I w_0^k - pz$ es continua, el teorema del máximo implica que Φ_z es hemicontinua superior y de valores no vacíos y compactos. Por otro lado Φ_p es hemicontinua superior y de valores compactos. Por lo tanto Φ es hemicontinua superior y de valores no vacíos y compactos. Además $\Phi(P, \boldsymbol{z})$ es convexo.
- Dado que Φ satisface la hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani, entonces existe $(P_n, \boldsymbol{z}_n) \in \Phi(P_n, \boldsymbol{z}_n)$.
- Como $\boldsymbol{z}_n \in \sum_{k=1}^I Z_n^k(P_n)$, $\boldsymbol{z}_n = \sum_{k=1}^I z_n^k$, para $\boldsymbol{z}_n^k = \left(z_{n,0}^k, z_n^k\right) \in B_n^k(P_n)$, entonces, por la monotonicidad de las preferencias, $p_{n,0}\left(z_{n,0} - \sum_{k=1}^I w_0^k\right) + p_n z_n = 0$.
- Como $P_n \in \arg \underbrace{\text{máx}}_{P \in \mathcal{P}} p_0\left(z_{n,0} - \sum_{k=1}^I w_0^k\right) + pz$, entonces $z_{n,0} - \sum_{k=1}^I w_0^k \leq 0$. Además, como $p_n > 0$, si $z_{n,a} < 0$ para algún $a \in \mathcal{A}$, entonces $p_{n,a} = 0$.
- Definimos $e_i^a \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$

$$e_i^a = \begin{cases} 0, & si \;\; i \neq a \\ 1, & si \;\; i = a \end{cases}$$

  Entonces $v^k(z_0, z) < v^k(z_0, z + \lambda e^a)$ para todo $\lambda > 0$ porque, por hipótesis, $intK_k \neq \emptyset$, luego existe al menos un $r \in S^k$ tal que $r_a > 0$. Ahora supóngase que $z_{n,a}^k < n$, entonces existe un $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que $\left(z_{n,0}^k, z_n^k + \lambda e^a < n\right) \in B_n^k(P_n)$ pero esto no es posible porque $\left(z_{n,0}^k, z_n^k\right) \in Z_n^k(P_n)$, luego $z_{n,a}^k = n$, para todo $k \in \mathcal{I}$ y entonces

- De manera similar, si $p_{n,0} = 0$, para todo $\mathbf{z}_n^k \in Z_n^k(P)$, $z_0^k = (n+1)w_0^k$, entonces $z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k = n\sum_{k=1}^{I} w_0^k > 0$ porque se asume que $w_0^k > 0$, lo cual contradice un resultado anterior. Esto implica que $p_{n,0} > 0$, por lo tanto $z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k = 0$.
- De lo anterior se obtiene que $\frac{1}{p_{n,0}} p_n z_n^k = \frac{1}{p_{n,0}} p_n\left(-\sum_{j\neq k} z_n^j\right)$ es acotada en n. En consecuencia $\left(z_{n,0}^k\right)$ es acotada.
- También z_n^k es acotada para todo $k \in \mathcal{I}$. El cual implica que existe un conjunto M acotado tal que $\mathbf{z}_n^k = \left(z_{n,0}^k, z_n^k\right) \in M$ para todo n y todo $k \in \mathcal{I}$, y como la sucesión de conjuntos $(intN_n)$ es creciente y no acotada, es claro que existe un $L \in \mathbb{N}$ tal que $M \subset intN_l$ para todo $l \geq L$, por lo tanto, para todo $l \geq L$ la sucesión $\left(\mathbf{z}_n^k\right)$ está contenida en $intN_l$. Luego aplicando la proposición 1, se obtiene que $\langle z_l, \frac{p_L}{p_{L,0}}\rangle$ es un equilibrio para la economía no acotada.

8. CONCLUSIONES

Los principales resultados de este trabajo pretenden enfatizar la importancia de un aspecto del modelo de intercambio de activos que no ha sido considerado con suficiente detalle en la literatura. Considerar explícitamente el valor que los individuos otorgan al consumo en el primer periodo, introduce diferencias cruciales en el modelo que modifican las condiciones bajo las cuales existe el equilibrio en la economía. Incluso en los casos en que estas condiciones coinciden, dado un conjunto de supuestos adicionales, la aplicación para el caso que aquí nos concierne no es trivial y exige modificar las pruebas sustancialmente, como se destacó en la sección 7.3.

En lo que respecta a la demostración de la existencia del equilibrio, aunque parte de condiciones más débiles que la de Carvajal y Riascos (2006), es presumible que algunas de éstas se pueden relajar aún más. En particular, el supuesto de que las expectativas de los agentes no dependen de los precios de los activos es demasiado fuerte y, a decir verdad, poco realista. Esta es, sin duda alguna, una vía de investigación en la que aún se puede seguir desarrollando el presente trabajo. En los modelos de Hart (1974) y Green (1973) se proponen condiciones más débiles que podrían resultar adecuadas para la economía anteriormente propuesta. Intuitivamente, la existencia del equilibrio no depende únicamente de qué tan similares sean entre sí las expectativas de los agentes, sino también de que éstas no se modifiquen drásticamente cuando los individuos observan cambios en los precios. Los dos modelos señalados sugieren que la existencia de vectores de retornos a los que todos los agentes les asignan probabilidades positivas, sin importar cuáles sean los precios de los activos, facilita o incluso garantiza que se dé el equilibrio. Es bastante plausible que una condición semejante, más débil que la que se asume en la demostración del teorema 2, se aplique a esta economía.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aliprantis, C. D. and K. C. Border (1994) In.nite Dimensional Analysis: A Hitchhiker.s Guide, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Araujo, A. and A. Sandroni (1999), On the convergence to homogeneous beliefs when markets are complete, Econometrica, 67: 663-672.

[3] Carvajal, A. and A. Riascos (2006), Belief Non-equivalence and Financial Trade: A Comment on a Result by Araujo and Sandroni. Documento CEDE No. 2006-27. Facultad de Economía, Universidad de los Andes.

[4] Cohn, D. L. (1980), Measure Theory, Birkhäuser, Boston.

[5] Green, J.R. (1973) Temporary general equilibrium in a sequential trading model with spot and futures transactions, Econometrica 41: 1103-24.

[6] Hammond, P. (1983) Overlapping expectations and Hart´s condition for equilibrium in a securities model, Journal of Economic Theory 31: 170-175.

[7] Hart, O. (1974) On the Existence of Equilibrium in a Securities Exchange Model, Journal of Economic Theory, 9: 293-311.

[8] Page, F. (1987) On Equilibrium in Hart´s Segurities Exchange Model, Journal of Economic Theory, 9: 293-311.

[9] Rockafellar, T. (1970) Convex Analysis. Princeton University Press.

[10] Werner, J. (1987) Arbitrage and the existence of competitive equilibrium, Econometrica, 55: 1403-1418.