ANALISIS NUMERICO PARA SOLUCIONAR ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES PARABOLICOS: ECUACION DE SCHRODINGER EN DOS DIMENSIONES

W. Maco V.[1], L. Salazar R.[2], E. Castillo P.[3], E. Rodriguez H.[4]

[1−2−3]Dpto. de Matemáticas de la FCFYM, [4]Sección de Postgrado,

Universidad Nacional de Trujillo, La Libertad, Perú.

19 de mayo de 2018

Resumen

En el presente trabajo de investigación se estudia la existencia de la solución de la ecuación de Schrödinger no lineal.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$ con $T > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha = 3$ y

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Se plantea el problema (1) en su forma variacional (P) y utilizando el método de Faedo-Galerkin se obtiene el problema aproximado (P_m) de (P), usando teoremas de compacidad, cuando $m \to \infty$ se prueba la existencia de la solución variacional del problema (1).

Palabras clave: Ecuación de Schrödinger no lineal, método de Faedo-Galerkin.

Abstract

In the present work of investigation the existence of the solution of the non-linear Schrodinger's equation is studied,

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

where $u = u(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$ con $T > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha = 3$ and

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

The problem is posed (1) in its variational form (P) and using the Faedo-Galerkin method the approximate problem is obtained $(P_m)$of (P), using compactness theorems, when $m \to \infty$ the existence of the variational solution of the problem is proved (1).

Key words: Non-linear Schrodinger equation, Faedo-Galerkin method.

I. Introducción

La ecuación de Schrödinger no lineal, en dos dimensiones

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}) \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde $u = u(\mathbf{x},t),\ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T]$ con $T > 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \alpha = 3$ y

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

describen ondas no lineales, a través de la ecuación (1). Hallar soluciones analíticas para la ecuación (1) no es sencillo, por este motivo, es preciso encontrar métodos para hallar soluciones númericas aproximadas.

En esta investigación se aplica el método de Faedo Galerkin para obtener la solución numérica de (1), para ello seguimos los pasos siguientes:

1. Plantear la formulación variacional de la ecuación (1) y demostrar la existencia de la solución para este problema.

2. Definir espacios de elementos finitos (espacios de dimensión finita), de aquí, surge un sistema linear.

3. Resolver el sistema lineal, el cual se soluciona por un método directo o iterativo.

1. Preliminares

A continuación, se menciona algunas definiciones y resultados que seran empleados en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Espacios de distribuciones

Definición 1.1.1 *Dada una función contínua,* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, donde* Ω *es un abierto, se denomina* ***soporte de*** φ *al conjunto cerrado en* Ω*, conjunto de puntos* x *tales que* $\varphi(x) \neq 0$.

$$sop\varphi = \overline{\{x \in \Omega \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}$$

Se representa por $C_0^\infty(\Omega)$ al espacio de las funciones contínuas e infinitamente diferenciables en Ω, con soporte compacto en Ω.

Definición 1.1.2 (Convergencia en $\mathbf{C_0^\infty(\Omega)}$) *Dado* Ω*, como en la definición anterior, considerando el espacio vectorial topológico* $C_0^\infty(\Omega)$*, una sucesión* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones en* $C_0^\infty(\Omega)$ *converge a* φ *en* $C_0^\infty(\Omega)$ *cuando satisface las siguientes condiciones:*

i) Existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ *tal que*

$$sop(\varphi) \subset K \quad y \quad sop(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente en* K *para todo multi-índice* α.

El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con el tipo de convergencia definina anteriormente, será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ y se denomina *espacio de las funciones test.*

Definición 1.1.3 *Se denomina distribución escalar sobre* Ω *a toda forma lineal* $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *contínua con respecto a la topología de* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Es decir, que si una sucesión* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathcal{D}(\Omega)$ *a* φ*, entonces,*

$$T(\varphi_n) \to T(\varphi) \quad en\ \mathbb{R}$$

El valor de la distribución T en la función de test φ se denota por $\langle T, \varphi \rangle$.

Definición 1.1.4 *El conjunto de distribuciones escalares sobre* Ω *es un espacio vectorial, denotado por* $\mathcal{D}'(\Omega)$*, denominado espacio de las distribuciones escalares sobre* Ω*.*

Definición 1.1.5 *Sea* $p \in [1, \infty]$*. Se denota po* $L^p(\Omega)$ *el conjunto de las (clases de equivalencia de) funciones medibles* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *tales que* $|u|^p$ *es integrable en el sentido de Lebesgue en* Ω*. Para* $u \in L^p(\Omega)$*, definimos*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dt \right)^{1/p} & si\ p \in [1, \infty) \\ \sup\limits_{x \in \Omega} es|u(x)| & si\ p = \infty \end{cases} ;$$

donde:

$$\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} \|u(x)\| = \text{ínf}\{M > 0 : \|u(t)\| \le M \;\; p.c.t. \;\; x \in \Omega\}$$

El espacio $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, con sus respectivas normas, es un espacio de Banach. En particular, cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuya norma y producto interno son definidos y denotados, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad (u, v)_{L^2(\Omega)} \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Definición 1.1.6 *Una sucesión de distribuciones escalares* $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge a una distribución escalar* T *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *cuando*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \;\; en\ \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Con la noción de convergencia, $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio vectorial topológico y tiene las siguientes cadenas de inmersiones y densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{para} \quad 1 \le p < \infty.$$

Definición 1.1.7 *Dada una distribución* T *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *y dado un multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *se define la derivada distribucional de orden* α *de* T *como la forma lineal y contínua* $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$*.*

1.2. Convegencia en L^p y el dual de L^p

Una sucesión (φ_n) convergen a φ en $L^p(\Omega)$ si

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Si p y q son índices conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 \leq p < \infty$, entonces el dual topológico de $L^p(\Omega)$, que será denotado por $[L^p(\Omega)]'$, es el espacio $L^q(\Omega)$. En el caso de $1 \leq p < \infty$ el espacio vectorial $L^p(\Omega)$ es separable y para $1 < p < \infty$ es reflexivo (ver [1, pág. 95]).

Teorema 1.2.1 *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Entonces, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge casi siempre a f en Ω, y existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ casi siempre en Ω.

Demostración:
Ver [1, pág. 94].

Definición 1.2.1 *Sea H un espacio de Hilbert. Se llama **base Hilbertiana** de H una sucesión de elementos (ω_n) de H tales que*

i) $\|\omega_n\| = 1 \ \ \forall n. \quad (\omega_n, \omega_m) = 0 \ \ \forall n, m, \quad m \neq n;$

ii) El espacio generado por (ω_n) es denso en H.

Definición 1.2.2 *Sea $m > 0$, un número entero positivo y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev de orden m, modelado sobre $L^p(\Omega)$, denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, es por definición el espacio vectorial de las (clases de) funciones de $L^p(\Omega)$ para las cuales sus derivadas hasta el orden α, en sentido de distribuciones, pertenecen a $L^p(\Omega)$, para todo multiíndice α, con $|\alpha| \leq m$.*

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ posee la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & si\ p \in [1,\infty) \\ \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} & si\ p = \infty \end{cases} ; \tag{1.1}$$

Proposición 1 *Los espacios lineales $W^{m,p}(\Omega)$ equipados con sus respectivas normas de (1.1) son espacio de Banach.*

Demostración:

Ver [5, pág. 24].

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $1 < p < \infty$ y es separable si $1 \leq p < \infty$. En el caso particular en que $p = 2$, el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, que es denotado por $H^m(\Omega)$ (ver [5, pág. 33]). Simbólicamente

$$H^m(\omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha| \leq m\}$$

cuya norma y producto interno son dados respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad ((u,v)) = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

El espacio $H^m(\Omega)$ con la estructura topológica anterior, es un espacio de Hilbert, inmerso en $L^2(\Omega)$.

El dual topológico del espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ es representado por $W^{-m,p}(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$ con p y q índices conjugados. Si $\varphi \in W^{-m,p}(\Omega)$ entonces $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ pertenece a $\mathcal{D}(\Omega)$. Cuando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ es denotado como $H_0^m(\Omega)$, cuyo dual es el espacio denotado por $H^{-m}(\Omega)$. La caracterización de $W^{-m,p}(\Omega)$ es dada por:

Teorema 1.2.2 *Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ si y solo si, existe $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tal que $T = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demostración:

Ver [5, pág. 31].

Lema 1.2.1 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración:
Ver [1, pág. 218].

1.3. Espacios $L^p(I;X)$ y distribuciones vectoriales

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y X un espcio de Banach con norma $\|\cdot\|$.
$C^0(I;X)$ es el espacio vectorial de las funciones

$$u : I \subset \mathbb{R} \to X$$
$$t \longmapsto u(t)$$

son continuas en I. Si $k \geq 1$,

$$C^k(I;X) = \{\varphi \in C^0(I;X) : \exists\ d^n\varphi/dt^n \in C^0(I;X),\ \forall n \leq k\}.$$

y

$$C^\infty(I,X) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(I;X).$$

Los espacios anteriores son espacios vectoriales para la suma de funciones y producto por escalares.

Definición 1.3.1 *Dada una función continua $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to X$, donde Ω es un abierto. El conjunto*

$$sop\varphi = \overline{\{x \in I\ :\ \varphi(x) \neq 0\ en\ X\}}$$

es llamado conjunto soporte de φ.

Definición 1.3.2 *Al espacio de las funciones infinitamente derivables en I y de soporte compacto contenido en I, se le denomina espacio de funciones tests vectoriales y se denota por*

$$\mathcal{D}(I;X) := C_0^\infty(I;X)$$

Definición 1.3.3 *Sea $p \in [1,\infty]$. Denotamos mediante $L^p(I;X)$ el conjunto de las (clases de equivalencia de) funciones medibles $u : I \to X$ tales que la función $t \in I \to \|u(t)\| \in \mathbb{R}$ pertenece a $L^p(I)$. Para $u \in L^p(I;X)$, definimos*

$$\|u\|_{L^p(I;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & si\ p \in [1,\infty) \\ \sup\limits_{t\in I} es\|u(t)\|_X & si\ p = \infty \end{cases} ;$$

donde

$$\sup_{t\in I} es\|u(t)\| = \text{ínf}\{M > 0 : \|u(t)\| \leq M \ \ p.c.t. \ \ t \in I\}$$

Cuando $p = 2$ y $X = H$ es un espacio de Hilbert, el espacio $L^2(I,H)$ es también un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por

$$(u,v)_{L^2(I,H)} = \int_I (u(s),v(s))_H ds.$$

Cuando X es reflexivo y separable y $1 < p < \infty$, entonces $L^p(I,X)$ es un espacio reflexivo (ver [3, pág. 19]) y separable, cuyo dual topológico se identifica al espacio de Banach $L^{p'}(I;X')$, donde p y p' son índices conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Más precisamente, se muestra que para cada $u \in [L^p(I;X)]'$, existe $\widetilde{u} \in L^{p'}(I;X')$ tal que

$$\langle u,\varphi\rangle_{[L^p(I;X)]'\times L^p(I;X)} = \int_I \langle \widetilde{u}(t),\varphi(t)\rangle_{X'\times X} dt.$$

En el caso, $p = 1$, el dual topológico del espacio $L^1(I;X)$ se identifica al espacio $L^\infty(I;X)$.

El espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{D}(I)$ en X es denominado espacio de distribuciones vectoriales sobre I con valores en X, el cual será denotado por $\mathcal{D}'(I;X)$.

Definición 1.3.4 *Sea $T \in \mathcal{D}'(I;X)$. La derivada de orden n es definida como la distribución vectorial sobre I con valores en X dado por*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n},\varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle \varphi, \frac{d^nT}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(I).$$

Definición 1.3.5 *Por $C^0(I;X)$, $\ 0 < T < \infty$, se representa el espacio de Banach de las funciones contínuas $u : I \to X$ con la norma de convergencia uniforme*

$$\|u\|_{C^0(I;X)} = \max_{t \in I} \|u(t)\|_X.$$

Definición 1.3.6 *Por $C^0_w(I;X)$, $\ 0 < T < \infty$, se denota al espacio de las funciones $u : I \to X$ débilmente continuas; es decir, la aplicación $t \to (v, u(t))_{X',X}$ es contínua en I, $\forall v \in X'$.*

Cuando $X = H$ es un espacio de Hilbert, la continuidad débil de u es equivalente a la continuidad de la aplicación $t \to (u(t), v)_H \ \ \forall v \in H$.

Teorema 1.3.1 (Aubin-Lions) *Sean los espacios de Banach B_0, B y B_1 con inmersión compacta entre B_0 y B e inmersión continua entre B y B_1. Dada una sucesión que satisface las condiciones:*

$$u_m \in L^p(0,T;B_0) \quad y \quad \frac{du_m}{dt} \in L^p(0,T;B_1).$$

Entonces existe una subsucesión u_{m_k} de u_m que converge fuertemente en $L^p(0,T;B)$.

Demostración:

Ver [4, pág. 58].

Lema 1.3.1 *Sean $V,\ H,\ V'$ tres espacios de Hilbert tales que $V \subset H \subset V'$, donde V' es el dual de V. Suponga que $u \in L^2(0,T,V)$ y $u' \in L^2(0,T,V')$, entonces $u \in C([0,T],H)$ es integrable en t y satisface*

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle.$$

Donde $u(t) \in V,\ u'(t) \in V'$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la aplicación de dualidad entre V' y V.

Demostración:

Ver [8, pág. 261].

Definición 1.3.7 *Sea $a, b \in \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se denota por $W(a,b,V,V')$ al espacio:*

$$W(a,b,V,V') = \{u : \ u \in L^2(a,b;V),\ u' \in L^2(a,b;V')\}$$

Teorema 1.3.2 (Integración por partes) *Sea* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Sean,* $u, v \in W(a,b;V,V')$, $u \in V$, *entonces*

$$\int_a^t \langle u'(t), v(t)\rangle dt + \int_a^t \langle u(t), v'(t)\rangle dt = (u(b, v(b))) - (u(a), v(a)$$

Demostración:

Ver [2, pág. 477].

1.4. Desigualdades importantes

Lema 1.4.1 (Desigualdad de Gronwall-Forma integral) *Sean* u, ϕ, w *funciones reales no negativas en* $[0,T]$ *satisfaciendo*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t w(\sigma)u(\sigma)d\sigma \tag{1.2}$$

para todo $t \in [0,T]$. *Entonces, para todo* $t \in [0,T]$ *se tiene*

$$u(t) \leq \phi(t) + \int_0^t w(s)\phi(s)\exp\left(\int_s^t w(r)dr\right)ds$$

Corolario 1.4.1 (Desigualdad de Gronwall) *Si* $\phi(t) = C$, *con* $C \in \mathbb{R}_+$, *la desigualdad anterior se reduce a:*

$$u(t) \leq C\exp\left(\int_0^t w(r)dr\right).$$

Definición 1.4.1 (Desigualdad de Cauchy con ε**)** *Sea* $a, b, \varepsilon > 0$, *entonces*

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2} \tag{1.3}$$

1.5. Postulados de la Mecánica Cuántica

Un *observable* es algo que podemos medir experimentalmente con algún instrumento o aparato, y una vez efectuada la medición podemos asignarle una cifra numérica bajo algún sistema de medición. Por ejemplo, en el caso de una masa en el eje x, los observables son la posición, la cantidad de movimiento y funciones de la posición y de la cantidad de movimiento.

Postulado 1: Todas las propiedades observables de un sistema físico están contenidas en su función de onda, $\psi(x,t)$, dependiente de las coordenadas de posición x de las partículas que componen el sistema, y del tiempo t. Esta función debe ser univaluada, contínua, con derivadas contínuas, y de cuadrado integrable.

Postulado 2:(Principio de superposición) Sean dos funciones de onda cualesquiera, $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$, que representan sendos estados de un mismo sistema, y sean dos números complejos arbitrarios c_1 y c_2. La combinación lineal $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ es la función de onda de un estado válido del sistema, y este estado se dice que es una superposición de los representados por ψ_1 y ψ_2.

Postulado 3: Cada observable físico, A, se representa mediante un operador lineal y hermítico $\widehat{A}$.

Postulado 4: Una medida única, individual, de la propiedad asociada al operador $\widehat{A}$ debe dar como resultado uno de los valores propios del operador. Decimos que n es una función propia del operador $\widehat{A}$, con valor propio a_n si

$$\widehat{A}\psi_n = a_n\psi_n.$$

Postulado 5: Sea ψ_n una función propia arbitraria de $\widehat{A} : \widehat{A}\psi_n = a_n\psi_n$. El conjunto de todas las funciones propias independientes forma un conjunto completo, de modo que la función de onda de un estado cualesquiera del sistema se puede escribir siempre como una combinación lineal de las funciones propias independientes:

$$\psi(x,t) = \sum_n \psi_n(x,t)c_n.$$

Postulado 6: La medición del observable asociado a un operador $\widehat{A}$ en un estado mezcla $\psi = \sum_n \psi_n c_n$ transforma el estado del sistema al estado propio ψ_n y da como resultado el valor propio a_n con una probabilidad proporcional a $|c_n|^2$. En consecuencia, el valor promedio de una colección de medidas de $\widehat{A}$ en el mismo estado es

$$\langle A \rangle = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi^* \widehat{A} \psi dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi^* \psi dx}$$

donde el denominador es la unidad si ψ está normalizada.

Postulado 7: La función de onda del sistema varía en el tiempo siguiendo la ecuación de ondas de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \right] \psi$$

1.6. Deducción de la ecuación no lineal de Schrodinger

La ecuación no lineal de Schrodinger (NLS) surge en varios contextos físicos en la descripción de ondas no lineales, tales como la propagación de un rayo láser en un medio cuyo índice de refracción es sensible a la amplitud de onda, ondas de agua en la superficie libre de un líquido ideal, y ondas de plasma. Proporciona una descripción canónica de la dinámica de envolvente de un tren de onda dispersiva escalar $\varepsilon \psi e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)}$ con una amplitud pequeña ($\varepsilon \ll 1$) pero finita, modulada lentamente en el espacio y el tiempo, propagándose en un sistema conservativo.

Consideremos una ecuación de onda escalar no lineal escrita simbólicamente

$$L(\partial_t, \nabla)u + G(u) = 0, \tag{1.4}$$

donde L es un operador lineal con coeficientes constantes y G una función no lineal que depende u y de sus derivadas. Para una solución de amplitud pequeña $\varepsilon \ll 1$, los efectos no lineales pueden ser despreciados, y la ecuación admite soluciones de ondas monocromáticas aproximadas

$$u = \varepsilon \psi e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - wt)} \tag{1.5}$$

con una amplitud constante $\varepsilon\psi$. La frecuencia w y el vector de onda $\mathbf{k}$ son cantidades reales relacionadas por la relación de dispersión

$$L(-iw, i\mathbf{x}) = 0. \tag{1.6}$$

Esta ecuación algebraica admite, en general, varias soluciones. Nos concentraremos en las soluciones de la forma

$$w = w(\mathbf{k}) \tag{1.7}$$

Aunque hemos asumido soluciones de onda con amplitud pequeña, se tiene que los efectos no lineales acumulados son significativos cuando las escalas de distancia de propagación y de tiempo son significativamente grandes. Un cálculo perturbativo de la solución de la ecuación (1.4) sobre la onda plana cuasi-monocromática (1.5) nos conduce a una serie de términos resonantes de diferentes ordenes, y que resultan en términos seculares de la expansión perturbativa de la solución [7]. Otras aproximaciones equivalentes, usadas en la literatura, para derivar la ecuación de Schrödinger no lineal pueden encontrarse en [6, 7].

Para este trabajo usaremos un argumento de tipo heurístico para derivar la NLS, ecuación (1.1), con $V \equiv 0,\ g(x,t) \equiv g =$ constante. Así, es conveniente reinterpretar la relación de dispersión lineal (1.7) de la siguiente forma

$$(i\partial_t - w(-i\partial_{\mathbf{x}}))\psi e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = 0, \tag{1.8}$$

donde $\partial_{\mathbf{x}}$ es el gradiente con respecto a $\mathbf{x}$ y $w(-i\partial_{\mathbf{x}})$ es el pseudo-operador diferencial obtenido reemplazando $\mathbf{k}$ por $-i\partial_{\mathbf{x}}$ en $w(\mathbf{k})$.

En un medio debilmente no lineal y con respuesta adiabática (es decir, inmediata), se espera que la no linealidad afecte a la relación de dispersión. La frecuencia de la onda depende entonces de la intensidad y esto nos lleva a reemplazar la frecuencia $w(\mathbf{k})$ por una función $\Omega(\mathbf{k}, \epsilon^2|\psi|^2)$, con $\Omega(\mathbf{k}, 0) = w(\mathbf{k})$. Además, la amplitud de onda compleja φ esta modulada en el espacio y en el tiempo de forma muy debil, dependiendo entonces de las variables $\mathbf{X} = \epsilon\mathbf{x}$ y $T = \epsilon t$. De esta forma, las derivadas ∂x y ∂x en la ecuación (1.8) son reemplazadas por $\partial_t + \epsilon\partial_T$ y por $\partial_{\mathbf{x}} + \epsilon\nabla$ respectivamente, donde ahora ∇ denota el gradiente con respecto a la variable espacial X. En consecuencia, la ecuación (1.8) puede ser reemplazada por la siguiente ecuación

$$[i\partial_t + i\epsilon\partial_T - \Omega(-i\partial_{\mathbf{x}} - i\epsilon\nabla, \epsilon^2|\psi|^2)]\psi e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = 0, \tag{1.9}$$

de forma equivalente, en un medio debilmente no lineal, la relación de dispersión buscada es

$$[w + i\epsilon\partial_T - \Omega(\mathbf{k} - i\epsilon\nabla, \epsilon^2|\psi|^2)]\psi = 0. \tag{1.10}$$

Como el parámetro ϵ es pequeño, esta ecuación puede desarrollarse en serie de potencias de segundo orden para ϵ. Teniendo en cuenta también la relación de dispersión lineal, se obtiene

$$i(\partial_T + \mathbf{v}_g \cdot \nabla)\psi + \epsilon[\nabla \cdot (D\nabla\psi) + \gamma|\psi|^2, \psi] = 0, \tag{1.11}$$

donde $\mathbf{v}_g \partial_{\mathbf{k}} w$ es la velocidad de grupo y $D = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial k_j \partial k_l}\right)$, con $j, l = 1, \dots, d$ es la mitad de la matriz hessiana de la frecuencia, estando ambas evaluadas sobre el vector de onda $\mathbf{k}$. El coeficiente de acoplamiento γ está asociado a la expansión en serie de potencias de la intensidad de la onda y viene dado por $\frac{\partial\Omega}{\partial(|\psi|^2)}$, evaluando en $\mathbf{k}$ y en $|\psi|^2 = 0$.

Podemos considerar a la ecuación (1.11) como un problema de valor inicial en la variable temporal y, por tanto, podemos escribir convenientemente esta ecuación definiendo $\xi = \mathbf{X} - T\mathbf{v}_g$, esto es, cambiando el sistema de referencia inicial a un sistema de referencia que se mueve con una velocidad dada por la velocidad de grupo. Haciendo tambén el cambio de variable $\tau = \epsilon T$, obtenemos la ecuación de Schrödinger no lineal buscada

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \nabla \cdot (D\nabla\psi) + \gamma|\psi|^2\psi = 0, \tag{1.12}$$

donde ahora las derivadas espaciales son hechas con respecto a la variable ξ.

2. Ecuación de Schödinger no lineal

$$u' - i\Delta u + |u|^\rho u = f \text{ en } Q \tag{2.13}$$

$$u = 0 \text{ sobre } \Sigma, \tag{2.14}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{2.15}$$

donde $\rho > 0$, $i = \sqrt{-1}$, $Q = \Omega \times (0,T)$ y $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Notación:

$$u(x,t) = u(t); \quad f(x,t) = f(t); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u'(t)$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|; \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} = |u|_p$$

2.1. Formulación variacional

Multiplicando a la ecuación (2.13) por $v \in H_0^1(\Omega)$

$$u'(t)v - i\Delta u(t)v + |u(t)|^\rho u(t)v = f(t)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

integrando sobre Ω

$$\int\limits_\Omega (u'(t)v - i\Delta u(t)v + |u(t)|^\rho u(t)v) = \int\limits_\Omega f(t)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega u'(t)v - i\int\limits_\Omega \Delta u(t)v + \int\limits_\Omega |u(t)|^\rho u(t)v = \int\limits_\Omega f(t)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)$$

aplicando la formula de Green, se tiene

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega u'(t)v - i\left(\cancelto{0}{\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu u(t)vd\sigma} - \int\limits_\Omega \nabla u(t)\nabla vdx\right) + \int\limits_\Omega |u(t)|^\rho u(t)v = \\ = \int\limits_\Omega f(t)vdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (u'(t),v) - ia(u(t),v) + (|u(t)|^\rho u(t),v) = (f(t),v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ p.c.t. } t \in (0,T) \\ \text{donde} \\ \qquad a(u(t),v) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}dx \quad , \quad (f,g) = \int\limits_\Omega f\bar{g}dx \end{cases} \tag{2.16}$$

Teorema 2.1.1 (de existencia y unicidad) *Supongamos que*

$$f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^2(Q), \tag{2.17}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{2.18}$$

Entonces existe una única función u que verifica (2.13)-(2.15).

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^P(Q), \quad p = \rho + 2 \tag{2.19}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.20}$$

Demostración:

Para ello se realizaran los siguientes pasos:

2.2. Etapa 1: Problema aproximado

Sabemoss que $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ son espacios de Hilbert separables. Entonces existe una base $\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que el espacio generado por esta base es denso en $H_0^1(\Omega)$ (y, así, en $L^2(\Omega)$, pues $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ con inyección densa).

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo,

$$V_m = gen\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

subespacio vectorial de dimensión finita.

Dado $v \in H_0^1(\Omega)$ ($v \in L^2(\Omega)$), $\exists\, \{v_m\}_{m\geq 1}$ tal que $v_m \in V_m$ y $v_m \to v$ en $H_0^1(\Omega)$ ($v_m \to v$ en $L^2(\Omega)$).

Dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\exists\, \{u_{0m}\}_{m\geq 1}$ tal que $u_{0m} \in V_m$ y $u_{0m} \to u_0$ en $L^2(\Omega)$.

Escojiendo una "*base especial*" en el método de Faedo-Galerkin:

las funciones propias de

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j\ , \quad j = 1, \ldots,\ w_j \in H_0^1(\Omega). \tag{2.21}$$

El problema aproximado asociado a (2.16) consiste en encontrar $u_m \in V_m$ definido por

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x) \quad \text{con} \quad g_{im} \in C^1(0,T) \tag{2.22}$$

es solución del problema

$$\begin{cases} (u'_m(t), w_j) - ia(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \quad \forall j = 1, \dots, \; t \in (0,T) \\ u_m(0) = u_{0m} \end{cases} \tag{2.23}$$

2.3. Etapa 2: Aproximación apriori

Estimativa I

Multiplicando (2.23) por $\overline{g_{jm}(t)}$ para cada j,

$$(u'_m(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j) - ia(u_m(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j) = (f(t), \overline{g_{jm}(t)} w_j)$$

sumando desde $j = 1$ hasta m

$$\left(u'_m(t), \sum_{j=1}^m \overline{g_{jm}(t)} w_j \right) - ia \left(u_m(t), \sum_{j=1}^m \overline{g_{jm}(t)} w_j \right) + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), \sum_{j=1}^m \overline{g_{jm}(t)} w_j \right) =$$
$$= \left(f(t), \sum_{j=1}^m \overline{g_{jm}(t)} w_j \right)$$

y por (2.22)

$$(u'_m(t), u_m(t)) - ia(u_m(t), u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))$$

$$\Rightarrow (u'_m(t), u_m(t)) - ia(u_m(t), u_m(t)) + |u_m(t)|^\rho (u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)) \tag{2.24}$$

entonces por el Lema 1.3.1, (2.24) se escribe como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + |u_m(t)|^\rho \int_\Omega |u_m(t)|^2 dx = (f(t), u_m(t))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + \int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2} dx = (f(t), u_m(t))$$

haciendo $p = \rho + 2$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + \int_\Omega |u_m(t)|^p dx = (f(t), u_m(t))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 + i\|u_m(t)\|^2 + |u_m(t)|_p^p = (f(t), u_m(t)) \quad \text{p.c.t. } t \in (0,T). \tag{2.25}$$

Tomando la parte real de (2.25) y multiplicando por 2, se obtiene

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|_2^2 + 2|u_m(t)|_p^p = 2Re[(f(t), u_m(t))] \quad \text{p.c.t. } t \in (0,T)$$

integrando la expresión anterior en el intervalo $(0,t)$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(s)|_2^2 ds + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds = 2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds$$

ahora por el Teorema 1.3.2 se tiene

$$|u_m(s)|_2^2 - |u_m(0)|_2^2 + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds = 2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds$$

$$\Rightarrow |u_m(s)|_2^2 + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds = 2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds + |u_m(0)|_2^2, \tag{2.26}$$

los sumandos que están a la derecha de la identidad (2.26) son acotados de la siguiente forma

$$2Re\int_0^t (f(s), u_m(s))ds \leq 2\int_0^t |f(s)|_{2'}|u_m(s)|_2 ds$$

usando la desigualdad 1.3 con $\varepsilon = \alpha$,

$$\begin{aligned} &\leq 2\left[\int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{2\alpha}ds + \int_0^t \frac{\alpha|u_m|_2^2}{2}ds\right] \\ &= \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha}ds + \int_0^t \alpha|u_m|_2^2 ds \end{aligned} \tag{2.27}$$

y como $|u_m(0)| \leq C|u_0|$ (pues $\{u_m(0)\}$ es una sucesión convergente), reemplazando (2.27) en (2.26)

$$|u_m(s)|_2^2 + 2\int_0^t |u_m(s)|_p^p ds \leq C|u_0| + \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha}ds + \int_0^t \alpha|u_m|_2^2 ds$$

$$\Rightarrow |u_m(s)|_2^2 \leq \underbrace{C|u_0| + \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha} ds}_{cte} + \int_0^t \alpha |u_m|_2^2 ds \qquad \forall t \in (0,T)$$

por el lemma de Cronwall

$$|u_m(s)|_2^2 \leq \underbrace{\left[C|u_0| + \int_0^t \frac{|f(s)|_{2'}^2}{\alpha} ds \right] e^{\alpha T}}_{cte} \quad , \quad \forall t \in (0,T), \forall m \in \mathbb{N}$$

luego

$$\sup_{t\in(0,T)} \operatorname{ess} |u_m(t)|_2 \leq K$$
$$\Rightarrow |u_m(t)|_\infty \leq K$$

$$\therefore \ \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Estimativa II

Usando (2.21), se reemplaza en (2.23) w_j por $-\Delta w_j$,

$$(u_m'(t), -\Delta w_j) - ia(u_m(t), -\Delta w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta w_j) = (f(t), -\Delta w_j) \quad (2.28)$$

entonces

$$(u_m'(t), -\Delta w_j) = -\int_\Omega u_m'(t) \Delta w_j dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u_m'(t) \nabla w_j dx - \cancelto{0}{\int_{\partial\Omega} \partial_\nu w_j \cdot u_m'(t) d\sigma}$$

$$= a(u_m'(t), w_j)$$

y

$$(f(t), -\Delta w_j) = -\int_\Omega f(t) \Delta w_j dx$$

$$= \int_\Omega \nabla f(t) \nabla w_j dx - \cancelto{0}{\int_{\partial\Omega} \partial_\nu w_j \cdot f(t) d\sigma}$$

$$= a(u_m'(t), w_j)$$

luego reemplazando en (2.28) las igualdades anteriores,

$$a(u_m'(t), w_j) + i(\Delta u_m(t), \Delta w_j) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta w_j) = a(f(t), w_j), \tag{2.29}$$

de (2.29) se deduce

$$a(u_m'(t), u_m(t)) + i(\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = a(f(t), u_m(t))$$

entonces

$$a(u_m'(t), u_m(t)) + i|\Delta u_m(t)|^2 + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = a(f(t), u_m(t)). \tag{2.30}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
2Re(|v|^\rho v, -\Delta v) &= -2Re \int\limits_\Omega |v|^\rho v \Delta v dx \\
&= 2Re \left(\int\limits_\Omega \nabla(|v|^\rho v) \nabla v dx - \cancelto{0}{\int\limits_{\partial\Omega} \partial_\nu v \cdot |v|^\rho v dx} \right) \\
&= 2Re \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(|v|^\rho v) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \\
&= 2Re \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega (1+\rho) v^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} |v|^{\rho-2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \\
&= 2Re(1+\rho) \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v^2 |v|^{\rho-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \\
&= 2Re(1+\rho) \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |v|^2 |v|^{\rho-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \\
&= 2Re(1+\rho) \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |v|^\rho \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx
\end{aligned}$$

de donde se concluye $2Re(|v|^\rho v, -\Delta v) \geq 0$.

En particular

$$2Re(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) \geq 0 \tag{2.31}$$

tomando la parte real de (2.30) y multiplicando por 2,

$$2a(u_m'(t), u_m(t)) + 2Re(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = 2Rea(f(t), u_m(t)),$$

por el lema 1.3.1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) + 2Re(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u_m(t)) = 2Rea(f(t), u_m(t)) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) \leq 2Rea(f(t), u_m(t)) \\ \Rightarrow \|u_m(t)\|^2 \leq 2Rea(f(t), u_m(t)) \\ \therefore \; \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Estimativa III

Usando la hipótesis (2.18), se verifica que $|u_m'(0)| \leq$ constante.

Derivando (2.23) con respecto a t

$$\frac{d}{dt}(u_m'(t), w_j) - i\frac{d}{dt}a(u_m(t), w_j) + \frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = \frac{d}{dt}(f(t), w_j),$$

realizando el mismo tipo de cálculo que en (2.31) se obtiene

$$Re\left(\frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t)), u_m'(t)\right) \geq 0$$

de lo cual se deduce que $\{u_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$.

Por lo tanto se concluye:

$$\begin{cases} \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \\ \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ \{u_m'\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \end{cases} \tag{2.32}$$

2.4. Etapa 3: Paso al limite

De (2.32) se pueden extraer subsucesiones convergentes $\{u_\mu\}$, $\{u_\mu'\}$ de $\{u_m\}$, $\{u_m'\}$ respectivamente tales que:

$$\begin{aligned} &u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)), \\ &u_\mu' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ en } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

En particular, de (2.32):

$$\begin{cases} \{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{cases} \tag{2.33}$$

Por el teorema 1.3.1,

$$u_\mu \to u \text{ en } L^2(Q) \text{ fuertemente y casi en todas partes en } Q.$$

Como $|u_m|^\rho u_m$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega))$, entonces

$$|u_m|^\rho u_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ en } L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

donde

$$w = |u|^\rho u.$$

para ello, se usa el siguiente lema

Lema 2.4.1 *Sea Q un abierto acotado de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ y sea $\{g_\mu\}_\mu$, g funciones $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, tales que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C,\ \ g_\mu \to g \ \ c.t.p\ (x,t) \in Q.$$

Entonces

$$g_\mu \to g \ \ en\ L^q(Q) - débil.$$

Tomando

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu\ ,\ \ q = \frac{\rho+1}{\rho+2} = p'.$$

La unicidad es inmediata, es suficiente notar que

$$Re(|u|^\rho u - |v|^\rho v, u - v) \geq 0 \quad \forall u,v \in L^p(\Omega). \tag{2.34}$$

■

II. Material y Métodos

1. Material

Para la realización de la presente investigación, se utilizó la ecuación no lineal de Schrödinger,

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u - \lambda |u|^{\alpha-1} u \text{ en } \Omega \times [0,T], \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega \times [0,T], \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

2. Métodos y técnicas

En el presente trabajo se utilizó las técnicas de aproximación de Faedo-Galerkin y teoremas de compacidad [4].

III. Resultados y Discusión

Para la solución aproximada u_m se obtuvo:

1. En la Estimativa I, se demostro que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.
2. En la Estimativa II, se demostro que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.
3. En la Estimativa III, se demostro que $\{u'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es acotado en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)$.

IV. Conclusiones

Con las estimativas I, II y III, se demostro que la solución del Problema aproximado (2.23) son acotadas y por ello son sucesiones convergentes en sus respectivos espacios. Por el Teorema 1.3.1, se puede extraer una subsucesión de $\{u_m\}$ que convergen fuertemente a u que es la solución del problema (1).

Referencias

[1] Brezis, H. (2010) *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media.

[2] Dautray, R. and Lions, J. L. (2012) *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Volume 5 Evolution Problems I.* Vol. 5. Springer Science & Business Media.

[3] Kreuter, M. (2015) *Sobolev Spaces of Vector-Valued Functions.* Ulm University Faculty of Mathematics and Economies.

[4] Lions, J.L. (1969) *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires.* Vol. 1. Dunod;Gauthier-Villars, Paris.

[5] Mederiros, L. A. and Milla, M. A. (2000) *Espaço de Sovolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*. Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro.

[6] Newell, A. (1985) *Solitons in mathematics and physics.* CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 48. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

[7] Sulem, C. and Sulem, P. (1999) *The nonlinear Schrödinger equation.* Applied Mathematical Sciences, vol. 139. New York: Springer-Verlag. Self-focusing and wave collapse.

[8] Temam, R. (1979) *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis.* North-Holland Publishing Company. New York.