RECONOCIMIENTO DE PATRONES

*

ORLANDO M. HERNÁNDEZ BRACAMONTE †, FRANCO RUBIO LÓPEZ ‡, AND RONALD LEÓN NAVARRO §

Resumen

En el presente artículo se plantea una alternativa para el problema de reconocimiento de patrones, utilizando una aplicación, polinómica, la cual converge a un punto fijo dado apriori, la sucesión recurrente definida con esta aplicación inicia con el objeto a ser reconocido.

Palabras clave. patrón, aplicación, punto fijo, punto fijo atractor, convergencia

1. Introducción. Una de las más anheladas creaciones del hombre es el ordenador, con tal creación ha sido capaz de construir muchas cosas y por que no decir, hasta cambiar la vida del ser humano. En el siglo pasado entre los años 1930 - 1950, con el surgimiento del ordenador también emerge una gran ambición del hombre, el poder imitar el cerebro humano. Entre los procesos que se deseaban modelar formalmente estaba el proceso de como el ser humano era capaz de reconocer un objeto (real o abstracto). Para realizar el reconocimiento de un objeto, el ser humano debe haber percibido el objeto, es decir, el objeto se encuentra como un recuerdo en la memoria. Podría entenderse también como una clasificación de objetos, por que para poder clasificarlos debo saber de que objetos se trata. La disciplina denominada reconocimiento de patrones se basa en las ideas presentadas lineas atras, denominaremos patrón al recuerdo que el individuo tiene en su memoria.

En el presente trabajo se efectuara el reconocimiento de patrones basandose en lo que se denomina memoria asociativa. En las siguientes lineas se explica en términos generales como se modela formalmente el proceso de asociar un recuerdo a un objeto que se acaba de percibir.

Sea un conjunto M, d una función definida de $M \times M$, la cual satisface las condiciones de métrica y una aplicación f definida de M en M, si un elemento x de M satisface $x = f(x)$ se denomina a dicho elemento punto fijo de f.

Como f es una aplicación sobre si misma, para un x en M, se define inductivamente $f^n(x)$ con $f^0(x) = x$ y $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, se denomina a $f^n(x)$ la n-ésima iteración de x bajo f. Cuando la aplicación f es contractiva y el espacio métrico sobre el cual esta definido es completo garantiza la existencia de un punto fijo x.

A partir de punto fijo se ha desarrollado toda una teoría, denominada teoría de punto fijo, esta es una herramienta muy útil dentro del análisis clásico, análisis numérico, teoría de juegos, etc.

En las últimas décadas muchas de las investigaciones estan direccionadas a modelar ciertos procesos del organismo humano, en particular a la memoria. Para ello se ha utilizado la teoría de punto fijo, para representar este proceso. Así un punto fijo x de una función f representa a un recuerdo en una memoria. Sea x_0 un estímulo externo (sonido, imagen, olor, sabor, etc) nuestro cerebro tiende a asociar dicho estímulo a un recuerdo, esta asociación es representada formalmente por la convergencia de x_0 a x. Una memoria con mayor cantidad de recuerdos implicará la existencia de más de un punto fijo. En el proceso de asociar un estímulo externo con un recuerdo, se encuentra incluido un reconocimiento de patrones.

1.1. Aplicación con un punto fijo atractor. Clasicamente cuando se construye una aplicación f, esta se define de tal manera que esta converge a un punto fijo x^*, el cual representa, por ejemplo, la solución de una ecuación y no se conoce apriori, solo se sabe que existe.

El objetivo es construir una aplicación f definida de $M \to M$, tal que f tenga por punto fijo a x^*, es decir $f(x^*) = x^*$, el cual es conocido desde un principio.

Definamos ahora una aplicación simple, de la cual conocemos su comportamiento

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2, \end{array} \tag{1.1}$$

*

†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n., Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú (ohernandez@unitru.edu.pe).,

‡Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n., Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú (frubio@unitru.edu.pe).,

§Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n., Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú (rleon@unitru.edu.pe).

para esta aplicación existen dos puntos fijos, $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 1$, es decir $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, además se tiene la sucesión

$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), \ldots, x_{n-1} = f^{n-1}(x_0), x_n = f^n(x_0), \ldots\}$$

Si $x_0 > 1\,(-1 < x_0)$, la sucesión anterior tiene una tendencia al infinito y en el caso que $0 < x_0 < 1\,(-1 < x_0 < 0)$ la sucesión converge a 0.

La aplicación f satisface

$$|f'(x)| < 1,$$

para cualquier $x \in V_r(0)$, tal que $V_r(0)$ es una vecindad del punto fijo x_1^*, el cual es atractor.

Para el problema de reconocimiento de patrones, la aplicación f es la que realiza el reconocimiento, el punto fijo x_1^* representa al patrón (el recuerdo en la memoria) y x_0 representa al objeto a reconocer. Si la sucesión $\{x_{i+1} = f(x_i)\}$ converge a x_1^*, un objeto (x_0) se reconoce como un recuerdo en la memoria (x_1^*).

1.1.1. Caso Unidimensional. Ahora se va a construir una aplicación, la cual tendrá como punto fijo atractor a $x_1^* = 2$, para este caso la aplicación será un polinomio de grado 2, es decir

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = Ax^2 + Bx + C \end{array}$$

hay que determinar A, B y C, para ello es necesario tener otro punto fijo, para este caso $x_2^* = 3$, el cual será repelente, tal como se vio en la aplicación (1.1) y un valor extra x_m es necesario para que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} A{x_1^*}^2 & + & Bx_1^* & + & C & = & x_1^* \\ A{x_2^*}^2 & + & Bx_2^* & + & C & = & x_2^* \\ A{x_m}^2 & + & Bx_m & + & C & = & y_m \end{array} \right. \tag{1.2}$$

tenga solución única, donde $x_m = x_1^* + \varepsilon$ y $y_m = x_1^*$, para este proceso $\varepsilon = 0.1$. Al solucionar el sistema de ecuaciones (1.2) obtenemos $A = 1.11111111111111$, $B = -4.55555555555554$ y $C = 6.6666666666666$. El proceso utilizado para la construcción de f, esta planteado y descrito por [Rubio-H 15].

1.1.2. Caso N-dimensional. Se construirá una aplicación f, la cual se define

$$\begin{array}{rccl} f: & R^n & \longrightarrow & R^n \\ & \bar{x} & \longmapsto & f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})) \end{array}$$

con punto fijo $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in R^n$, por teorema 3.1, ([Rubio-H 17]), se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j^* = x_i^*$$

y nos restringiremos al siguiente caso $x_i^* \in Z$, $x_i^* \neq 0$ y $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k^*|$, se construye W de la siguiente manera

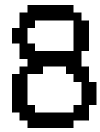
1. Si $-\dfrac{x_j^*}{x_i^*} > 0$, $w_{ij} = -\dfrac{1}{M}$.
2. Si $-\dfrac{x_j^*}{x_i^*} < 0$, $w_{ij} = \dfrac{1}{M}$

tal como se ha propuesto por ([Rubio-H 17]).

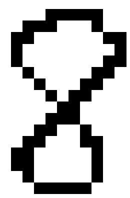
Ahora se fórmula el siguiente problema específico de reconocimiento de patrones, se construye f de tal manera que, el punto fijo sea la siguiente image

tal que $x_i \in \{-1, 1\}$, para $i = \overline{1, 400}$, en la imagen 1 representa al blanco y -1 al negro. Se construye $W_{400\times400}$ acorde a la regla mencionada lineas atras, finalmente la imagen de la aplicación $f(\bar{x}) = W\,\bar{x}$.

Sea la siguiente imagen, objeto a reconocer



$\bar{x}^* = (x_1, \ldots, x_n)$

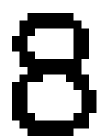


$\bar{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n)$

se tiene la sucesión

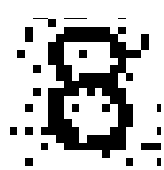
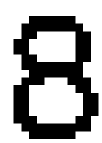
$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), \ldots, x_{10} = f^9(x_0)\}$$

obteniendo



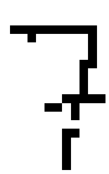
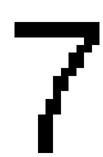
$\bar{x}_{10}$

es decir $\bar{x}_0$ se ha reconocido como $\bar{x}^*$. en el siguiente cuadro se observa distintos casos.

 $\ldots$ 

$\bar{x}_0$ $\bar{x}_{10}$

Se construyen otras aplicaciones para los siguientes casos

 $\ldots$ 

$\bar{x}_0$ $\bar{x}_{10}$

$\bar{x}_0$ $\ldots$ $\bar{x}_{10}$

Los resultados obtenidos son buenos, ha permitido reconocer ciertos objetos un poco distorcionados, en este caso algunos son números escritos a mano. Sin embargo esta es una primera simple tentativa para afrontar el problema de reconocimiento de patrones, el cual es bastante complejo de afrontar.

REFERENCES

[Rubio-H 15] Rubio López, F, Hernández Bracamonte, O. Construcción de una función polinómica a partir de los puntos fijos dados previamente, Selecciones Matemáticas, vol. 02 (01), 2015, 54-67.

[Rubio-H 17] Rubio López, F, Hernández Bracamonte, O. Construcción de una función Vectorial a partir de un punto fijo dado previamente, Selecciones Matématicas, vol. 04 (01), 2017, 124-138.