



Estimador simple y fuertemente consistente de distribuciones estables

Simple estimator and consistent strongly of stable distributions

Cira E. Guevara Otiniano* and Thiago R. Sousa †

Received, Jan. 20, 2016

Accepted, Mar. 15, 2016.

DOI: <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.01.04>

Resumen

Distribuciones estables son utilizadas extensivamente para analizar rendimientos de activos financieros, tales como tasas de cambio y precios de acciones. En este trabajo proponemos un estimador simple y fuertemente consistente para el parámetro de escala de distribuciones estables simétricas de Lévy. La ventaja de ese estimador es que el tiempo de su cálculo computacional es mínimo por lo que puede ser útil para inicializar métodos computacionales intensivos tales como el procedimiento de máxima verosimilitud. Com muestras aleatorias de tamaño n probamos la eficacia de los estimadores a través de el método de Monte Carlo. Incluimos también aplicaciones para tres conjuntos de datos reales. .

Palabras clave. Distribución Lévy estable; Transformada de Mellin; Estimador de escala.

Abstract

Stable distributions are extensively used to analyze earnings of financial assets, such as exchange rates and stock prices assets. In this paper we propose a simple and strongly consistent estimator for the scale parameter of a symmetric stable Lévy distribution. The advantage of this estimator is that your computational time is minimum thus it can be used to initialize intensive computational procedure such as maximum likelihood. With random samples of sized n we tested the efficacy of these estimators by Monte Carlo method. We also included applications for three data sets.

Keywords. Lévy stable distribution; Mellin transform; Scale estimator.

1. Introducción. Desde Mandelbrot (1963), distribuciones estables son utilizadas para ajustar datos financieros de economía. Muchos de esos conjuntos de datos cubren eventos extremos, implicando que su distribución correspondiente presenta colas pesadas. La clase de distribuciones estables fue descrito por Paul Lévy 1924 en su investigación sobre el comportamiento de sumas de variables aleatorias independientes y idénticamente distribuidas (i.i.d.). Formalmente, una variable aleatoria X es α - estable si

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = n^{\frac{1}{\alpha}} X + D_n,$$

donde X_1, \dots, X_n son copias independientes de X , $D_n \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha \leq 2$. En general, la falta de forma cerrada simple para la función de densidad de esa variable es generalmente una barrera para trabajar con la estimación de sus parámetros. Se han hecho muchos esfuerzos para representar densidades estables en términos de funciones especiales como se describe en Zolotarev (1986) y Schneider (1986).

*Departamento de Estatística da Universidade de Brasília (cira@unb.br).

†Departamento de Estatística da Universidade de Brasília (thiagoestatistico@gmail.com)

La clase de distribuciones estables es generalmente conocida por su función característica. Una variable aleatoria X se dice que es estable cuando su función característica es dada por

$$(1.1) \quad Ee^{i\theta X} = \exp\{-|\sigma\theta|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sgn}(\theta)w(\alpha, \theta) + i\mu\theta]\},$$

donde $w(\alpha, \theta) = \tan(\frac{\pi\alpha}{2})$ para $\alpha \neq 1$ y $w(\alpha, \theta) = -(2/\pi)\ln|\theta|$ para $\alpha = 1$. El parámetro $0 < \alpha \leq 2$ es el índice de estabilidad (relacionado con la espesura de la cola de la densidad), $\sigma \geq 0$ es el parámetro de escala, $-1 \leq \beta \leq 1$ es el parámetro de asimetría, y $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de localización.

Hay varios métodos diferentes para estimar esos parámetros. Por lo general, esas técnicas de estimación están basadas en algunas propiedades de la función característica o en base a cálculos numéricos de la función de la densidad estable. Algunos de los ejemplos de abordajes de métodos antes mencionados, son: método del tipo regresión dado por Koutrovellis en 1980 (Borak(2005)) y el método de máxima verosimilitud numérico descrito en Nolan (2001). El primero método funciona ajustando la función característica empírica hasta conseguir algún tipo de convergencia, funciona bien y es mucho más rápido que el método de Nolan. La velocidad de la convergencia, sin embargo, depende de las estimaciones iniciales y el criterio de convergencia .

Por otro lado, el procedimiento de máxima verosimilitud es casi siempre el método más preciso de estimación pero es generalmente el más lento cuando se trabaja con muestras bastante grandes. Desafortunadamente, en muchos problemas de la vida real, la precisión no justifica la aplicación de la estimación por máxima verosimilitud, especialmente cuando los cálculos deben ser realizado en línea, como se indica en Borak et al (2005). Fuera de los métodos discutidos antes, las investigaciones se han concentrado en la estimación del parámetro de cola (α). Uno de los mas simples y relevantes estimadores de α fué presentado por Hill en 1975 (Chang(2007)). Hoy en día las investigaciones todavía están tratando de construir estimadores aceptables para los otros parámetros, Rachev, T. S. (2003).

El modelo de distribución Lévy estable simétrica es bastante útil para ajustar datos de economía, como se describe en Chang (2007). Para tasas de cambio los parámetros β y μ son casi siempre iguales 0. Cuando se trabaja con la distribución simétrica, Chang (2007) propuso un estimador consistente para el qual el parámetro de escala, el cual depende del parámetro de la cola α ,

$$(1.2) \quad \hat{\sigma}(\alpha) = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha} \left(\frac{1}{2\epsilon} \frac{1}{r_n} \sum_{j=1}^{r_n} 1(|Y_j^{(n)}| \leq \epsilon)\right)^{-1},$$

donde $\epsilon = \epsilon_n \rightarrow 0$ y $r_n = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Este estimador es consistente, pero es muy sensible a la elección de ϵ . También hay otros estimadores del parámetro de escala basado en momentos positivos de una variable α - estable cuya existencia está restringida por el parámetro α (Rachev, T. S. (2003)). En este trabajo se propone un estimador consistente para el parámetro de escala σ con base en la transformada de Mellin de la variable estable simétrica, en otras palabras, se propone un estimador que converge casi seguramente para σ . La transformada de Mellin de una variable X , cualquier, es definida por:

$$(1.3) \quad \mathcal{M}\{f_X(x; \alpha, \sigma, 0, 0)\}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f_X(x; \alpha, \sigma, 0, 0) dx,$$

donde f_X es la función de densidad de X .

2. Estimador del parámetro de escala basado en la transformada de Mellin .

Lema 1. Sea $X \sim S(\alpha, \sigma, 0, 0)$ una variable aleatoria simétrica con $0 < \alpha < 2$. Entonces:

$$(2.1) \quad f(x; \alpha, \sigma, 0, 0) = \frac{1}{\alpha\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \Gamma(s)\Gamma(\frac{1-s}{\alpha})\sin(\frac{\pi}{2}(1+s))(\frac{x}{\sigma})^{-s} ds,$$

donde $0 < \Re(s) < 1$ e \mathcal{L} es el contorno en el plano complejo que encierra los polos de $\Gamma(s)$ en el sentido positivo.

Prueba Usando la representación de X en términos de la función característica, tenemos

$$f(x; \alpha, \sigma, 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} e^{-|k\sigma|^\alpha} dk.$$

Aquí usamos la representación de la función exponencial e^{-ikx} , $(kx) \neq 0$, en términos de Mellin- Barnes,

$$f(x; \alpha, \sigma, 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \Gamma(s) \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-|\sigma k|^\alpha} (ik)^{-s} dk \right\} x^{-s} ds,$$

con la condición que $\mathcal{R}(s) < 1$ para la convergencia de la expresión en el paréntesis. En seguida usamos aa representación de la integral de Legendre de la función Gamma (válida para $\mathcal{R}(s) > 0$) y obtenemos

$$f(x; \alpha, \sigma, 0, 0) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1-s}{\alpha})(\frac{x}{\sigma})^{-s}}{\Gamma(\frac{1+s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})} ds.$$

Aplicando la fórmula de la reflexión de Euler, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, completamos la prueba (para mas detalles, Pagnini (2008)).

□

Lema 2. Sea $X \sim S(\alpha, \sigma, 0, 0)$ una variable aleatoria simétrica, $0 < \alpha < 2$. Entonces:

$$(2.2) \quad \mathbf{E}|X|^{s-1} = \frac{2\sigma^{s-1}\Gamma(\frac{1-s}{\alpha})\Gamma(s)\sin(\frac{\pi}{2}(1+s))}{\alpha\pi} < \infty, \quad 0 < s < 1.$$

$$(2.3) \quad \mathbf{E}|X|^{2s-2} = \frac{2\sigma^{2s-2}\Gamma(\frac{2-2s}{\alpha})\Gamma(2s-1)\sin(\pi s)}{\alpha\pi} < \infty, \quad \frac{1}{2} < s < 1.$$

Prueba

$$\mathbf{E}|X|^{s-1} = 2 \int_0^\infty x^{s-1} f_X(x; \alpha, \sigma, 0, 0) dx = 2\mathcal{M}\{f(x; \alpha, \sigma, 0, 0)\}(s)$$

y

$$\mathbf{E}|X|^{2s-2} = 2\mathcal{M}\{f(x; \alpha, \sigma, 0, 0)\}(2s-1)$$

La prueba queda completa al aplicar la definición de la transformada de Mellin (2.1), en el Lema 1. □

Lema 3. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria i.i.d de $X \sim S(\alpha, \sigma, 0, 0)$ para $0 < \alpha < 2$ y $0 < s < 1$. Entonces:

$$(2.4) \quad \sum_{i=1, X_i \neq 0}^n \frac{|X_i|^{s-1}}{n} \xrightarrow{a.s.} \mathbf{E}|X_1|^{s-1}, \quad n \rightarrow \infty$$

Prueba La prueba de este Lema sigue fácilmente de la Ley fuerte de grandes números (pg. 238, Feller, 1968) e los Lemas 1, 2. □

Teorema 1. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria i.i.d de $X \sim S(\alpha, \sigma, 0, 0)$, con $0 < \alpha < 2$ e $0 < s < 1$. Entonces:

$$(2.5) \quad \hat{\sigma}(\alpha, s) = \left\{ \frac{\alpha\pi \sum_{i=1, X_i \neq 0}^n |X_i|^{s-1}}{2n\Gamma(\frac{1-s}{\alpha})\Gamma(s)\sin(\frac{\pi}{2}(1+s))} \right\}^{\frac{1}{s-1}} \xrightarrow{a.s.} \sigma, \quad n \rightarrow \infty.$$

Prueba

Manipulando la ecuación (2.2) para aislar σ e utilizando la estadística de (2.4), obtenemos el estimador (2.5). La convergencia sigue del hecho que $\hat{\sigma}(\alpha, s)$ es una función continua de una variable aleatoria que converge cuasi seguramente para el valor dado en la ecuación (2.2). □

Teorema 2. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria i.i.d de $X \sim S(\alpha, \sigma, 0, 0)$, con $0 < \alpha < 2$ e $0 < s < 1$. Entonces:

$$(2.6) \quad \hat{\sigma}(\alpha, s)^{s-1} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\sigma^{s-1}, \sqrt{Var(\hat{\sigma}(\alpha, s)^{s-1})}),$$

donde

$$(2.7) \quad Var(\hat{\sigma}(\alpha, s)^{s-1}) = \frac{\sigma^{2s-2}}{n} \left[\frac{\alpha\pi\Gamma(\frac{2-2s}{\alpha})\Gamma(2s-1)\sin(\pi s)}{2\Gamma^2(\frac{1-s}{\alpha})\Gamma^2(s)\sin^2(\frac{\pi}{2}(1+s))} - 1 \right].$$

Prueba Definimos $Y_k = |X_k|^{s-1}$, $k = 0, 1, \dots, n$ e aplicamos el Lema 2, con esto tenemos que $E(Y_k) = E|X_1|^{s-1}$ e $Var(Y_k) = E|X_1|^{2s-2} - E^2|X_1|^{s-1}$ son finitos. Escribiendo $\frac{S_n}{n} = \sum_{i=1, X_i \neq 0}^n \frac{|X_i|^{s-1}}{n}$ y usando el Teorema del Limite Central (pg. 259, Feller, 1968) tenemos que:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(EY_1, Var(Y_1/n)).$$

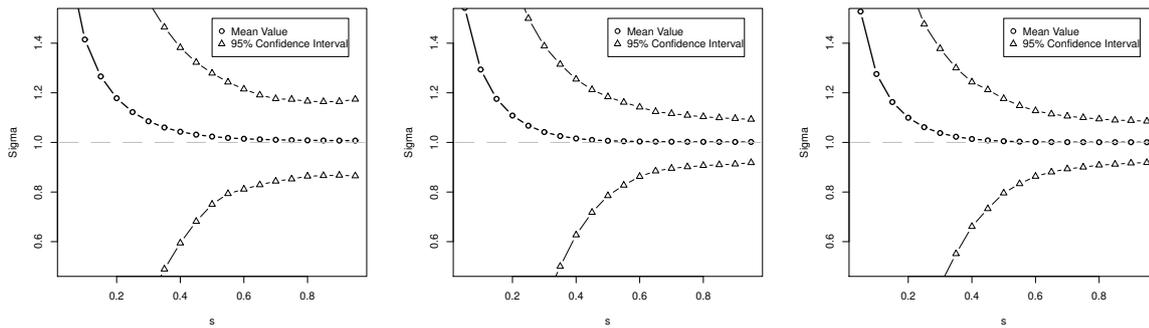


FIGURA 3.1. De izquierda a derecha: Intervalo de confianza de 95 % da média de $\hat{\sigma}(\alpha, s)$ para $\alpha = 0.5, 1.1, 1.5$.

La prueba de (2.6) sigue al utilizar (2.5). \square

Corolário 1. Dado el estimador de índice de estabilidad α , $\frac{1}{2} < s < 1$ y una muestra aleatoria de tamaño n , un intervalo de confianza de $100(1 - \gamma) \%$ para el estimado de escala σ , es

$$(2.8) \quad \left[\left(\hat{\sigma}(\alpha, s)^{s-1} + z_{\gamma/2} V \right)^{\frac{1}{s-1}}, \left(\hat{\sigma}(\alpha, s)^{s-1} - z_{\gamma/2} V \right)^{\frac{1}{s-1}} \right],$$

donde $V = Var(\hat{\sigma}(\alpha, s)^{s-1})$, $z_{\gamma/2}$ es tal que $P(Z > z_{\gamma/2}) = \gamma/2$ y Z es una variable aleatoria normal patron.

3. Mejor opción de s y simulación. Un cuidado sobre el estimador sigma es con respecto a la selección de s . Como no estamos trabajando con momentos positivos, la existencia de ese estimador no está condicionado al valor de α y si al valor de s . El estimador presentado en (2.5) está bien definido para cada número real $0 < s < 1$ e cualquier α . Hemos investigado la mejor opción de s , por simulación de Monte Carlo, para diferentes valores de α . Para la simulación de variables aleatorias estables utilizamos el método de Chambers, Mallows y Stuck (Borak 2005).

El estimador de escala fué examinado con la ayuda de un estudio de simulación en el que el parámetro α fué estimado por el estimador de Hill.

CUADRO 3.1
Media, Mediana e EQM de $\hat{\sigma}(\alpha, s)$ para $\sigma = 0,5$ and $s = 0,99$.

α	Statistic	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$\alpha = 0,3$	Media	0.6279	0.5547	0.5117	0.5066
	Mediana	0.5099	0.4998	0.5009	0.5016
	EQM	0.2297	0.0654	0.0106	0.0050
$\alpha = 0,6$	Media	0.5204	0.5137	0.5048	0.5021
	Mediana	0.4935	0.5019	0.5032	0.4993
	EQM	0.0312	0.0141	0.0028	0.0013
$\alpha = 0,9$	Media	0.5183	0.5122	0.4998	0.4998
	Mediana	0.5038	0.5082	0.4987	0.4985
	EQM	0.0156	0.0077	0.0015	0.0007
$\alpha = 1,2$	Media	0.5143	0.5034	0.5005	0.5003
	Mediana	0.5057	0.4969	0.4999	0.5008
	EQM	0.0107	0.0050	0.0010	0.0005
$\alpha = 1,5$	Media	0.5066	0.5079	0.5019	0.5005
	Mediana	0.4984	0.5033	0.5016	0.5010
	EQM	0.0082	0.0042	0.0008	0.0004
$\alpha = 1,9$	Media	0.5062	0.5068	0.5001	0.4994
	Mediana	0.5014	0.5073	0.5003	0.4992
	EQM	0.0070	0.0035	0.0007	0.0003

Simulamos 1000 muestras de tamaño $n = 1000$ y investigamos la distribución empírica de $\hat{\sigma}(\alpha, s)$ para $0 < s < 1$ cuando el verdadero valor es 1.

CUADRO 3.2
Media, Mediana e EQM de $\hat{\sigma}(\alpha, s)$ para $\sigma = 1$ and $s = 0,99$.

α	Statistic	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$	$n = 1000$
$\alpha = 0,3$	Media	1.2155	1.1391	1.0238	1.0139
	Mediana	1.0206	1.0247	1.0122	1.0065
	EQM	0.6770	0.2802	0.0398	0.0200
$\alpha = 0,6$	Media	1.0618	1.0179	1.0109	1.0028
	Mediana	0.9993	0.9842	1.0064	0.9988
	EQM	0.1464	0.0623	0.0116	0.0057
$\alpha = 0,9$	Media	1.0229	1.0091	1.0046	1.0001
	Mediana	0.9885	0.9993	1.0024	0.9973
	EQM	0.0652	0.0285	0.0058	0.0028
$\alpha = 1,2$	Media	1.0106	1.0064	0.9999	1.0011
	Mediana	0.9910	0.9936	0.9979	1.0015
	EQM	0.0421	0.0216	0.0039	0.0018
$\alpha = 1,5$	Media	1.0151	1.0103	1.0051	0.9999
	Mediana	0.9945	1.0058	1.0054	0.9980
	EQM	0.0339	0.0161	0.0033	0.0015
$\alpha = 1,9$	Media	1.0080	1.0071	1.0021	1.0007
	Mediana	1.0002	1.0045	1.0008	1.0019
	EQM	0.0272	0.0136	0.0028	0.0013

Nuestros estudios de simulación mostraron, considerando los diferentes valores escogidos de α y σ , que el valor mas apropiado de s es próximo a 1, como por ejemplo, $s = 0,99$, conforme mostrado en la Figura 3.1.

También señalamos que cuando mas grande es el valor de α los resultados de σ mejoran, se obtuvo valores aceptables de σ para $\alpha > 0,3$. El resumen de las estadísticas (Média, Mediana y Erro quadrático médio (EQM)) de $\hat{\sigma}(\alpha, s)$ con $\sigma = 0,5$ and $s = 0,99$, a través de simulaciones Monte Carlo para muestras de tamaño $n = 50$, $n = 100$, $n = 500$ y $n = 1000$, son mostradas en las Tablas (3.1) y (3.2). Además, esas tablas muestran que el Erro Quadrático Médio (EQM) del estimador de escala es de orden $1/n$ sobre el rango de los valores del parámetro α , incluso para pequeños tamaños de muestras como $n = 50$.

4. Aplicación para colas asimétricas. Chang (2007) presentó una aplicación de distribuciones estables en la que cola izquierda y cola derecha tienen un comportamiento distinto, en el sentido de que, para $0 < \alpha^L, \alpha^R \leq 2$ e constantes c^L e c^R ,

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\alpha^L} P(X \leq -x) = c^L \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha^R} P(X \geq x) = c^R,$$

lo que sugiere que las colas izquierda y derecha pueden ser modeladas por separado, utilizando la mezcla de dos distribuciones simétricas con parámetro de localización igual a cero. Otro punto importante es que al utilizar el estimador (1.2) de σ ese método tiene el problema de la elección de ϵ . Por esta razón, con nuestro estimador de σ dado en (2.5) podemos mejorar ese método .

Considerando Y_1, \dots, Y_n una muestra aleatoria de $Y \sim S(\alpha, \sigma, \beta, \mu)$, para estimar α utilizamos el estimador de Hill, para μ el estimador de momentos

$$(4.2) \quad \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n^{\frac{1}{\alpha}} X_1}{n - n^{\frac{1}{\alpha}}},$$

sugerida por Samarodnitsky y Taqq (1994) e para σ nuestro estimador dado en (2.5). Para esto, primero definimos la transformación $X_i = Y_i - \hat{\mu}$ construimos una muestra centrada en cero e seguimos la misma teoría desenvuelta en Chang(2007). Consideramos Y_1, \dots, Y_n una muestra aleatoria de Y con distribución asimétrica compuesta por dos distribuciones simétricas F_{α^L, σ^L}^L y F_{α^R, σ^R}^R , esto es

$$(4.3) \quad F(x)^L = \begin{cases} F(x), & \text{se } x < 0 \\ 1 - F(-x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \text{ e } F^R(x) = \begin{cases} 1 - F(-x), & \text{se } x < 0 \\ F(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Los índices de estabilidad α^L y α^R son estimados usando la muestra X_1, \dots, X_n por

$$(\hat{\alpha}_n^L)^{-1} = \frac{1}{k^L} \sum_{j=1}^{k^L} \log \frac{X_{(j)}}{X_{(k^L)}} \text{ y } (\hat{\alpha}_n^R)^{-1} = \frac{1}{k^R} \sum_{j=n-k^R}^n \log \frac{X_{(j)}}{X_{(n-k^R)}}$$

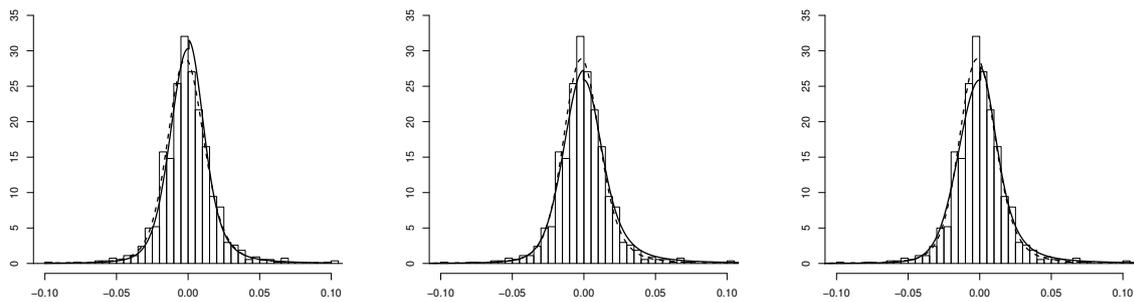


FIGURA 4.1. Densidades estimadas : estimador Nolan (línea trazada) y estimador propuesto (línea continua), para NIKKEI, IBOVESPA y VIENA ATX, de izquierda a derecha.

donde $k^L \uparrow \infty$, $\frac{k^L}{n} \rightarrow \infty$ y $k^R \uparrow \infty$, $\frac{k^R}{n} \rightarrow \infty$. Del mismo modo, los parámetros de escala de la cola izquierda y derecha se estiman con las sub - muestras, $(X_1^L, \dots, X_{n_L}^L)$ y $(X_1^R, \dots, X_{n_R}^R)$ respectivamente, por

$$\hat{\sigma}_n^L = \hat{\sigma}(\hat{\alpha}_n^L, s) \text{ and } \hat{\sigma}_n^R = \hat{\sigma}(\hat{\alpha}_n^R, s),$$

como definidos en (2.5).

Para la aplicación utilizamos tres conjuntos de datos procedentes de índices económico diarios: Nikei 225 (Japón), Ibovespa (Brasil) y Viena ATX (Austria).

Considere X_t el valor al final del día t para el índice económico precio de las acciones y sea $Z_t = X_{t+1} - X_t$ el valor del retorno diario. La serie de tiempo empleado fue tomado del día 1 de enero 2007 a día 16 de junio de 2011, disponible en el sitio web <http://finance.yahoo.com>. También comparamos el estimador de escala utilizando el programa STABLE, de Nolan: academic2.american.edu/~jpnolan. El resumen de los datos y las comparaciones entre los estimadores son mostrados en la Tabla (4.1).

CUADRO 4.1
Estimativas de los parámetros de los retornos .

Índice Económico	type	n	α	σ	μ	β	k
NIKKEI 225	Asimétrico (R)	1080	1.50992	0.009100			227
	Asimétrico (L)	1080	1.72585	0.009365			227
	MLE(Nolan)	1080	1.64700	0.009864	-0.00050	0.1868	227
IBOVESPA	Asimétrico (R)	1090	1.40630	0.011197			229
	Asimétrico (L)	1090	1.76186	0.010394			229
	MLE(Nolan)	1090	1.57770	0.010766	0.00060	0.2662	229
VIENA ATX	Asimétrico (R)	1101	1.40020	0.010451			231
	Asimétrico (L)	1101	1.82905	0.010926			231
	MLE(Nolan)	1101	1.64270	0.011121	0.00195	0.3243	231

La densidad estimada se ajusto bien a los tres conjuntos de datos, Figura 4.1.

5. Conclusion. El estudio de simulación mostró buenos resultado para el estimador de σ propuesto en este trabajo. Así, la estimación funciona bien para ajuste de distribuciones estables a datos reales. Además, la diferencia entre nuestro estimador (2.5) y el estimador de Nolan es pequeña, especialmente para $\alpha > 1$. Este nuevo enfoque permite que la estimación de grandes conjuntos de datos sea bastantes simple. De hecho, nuestro estimador también puede ser utilizado para estimar distribuciones α estables no simétricas, conforme descrito en este trabajo.

Referencias

- [1] C. Y. D. CHANG, G. O. CIRA, M. RAUL, N. R. PUSHPA, *Levy Flight Approximations for Scaled Transformations of Random Walks*, Computational Statistics and Data Analysis, 51 (2007), pp 6343-6354.
- [2] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications II*, 2nd edition, Wiley, USA, (1971).
- [3] P. LÉVY, *Calcul des Probabilites*, Gauthier Villars, (1925).
- [4] I. A. KOUTROUVELIS, *Regression-type estimation of the parameters of stable laws*, Journal of the American Statistical Association, 75(1980), pp 918-928.
- [5] MAINARI, G. PAGNINI (2008), *Mellin Barnes integral for stable distributions and their convolutions*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 11(2008), pp 443-456.

- [6] B.B. MANDELBROT , *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business 36(1963), pp 394-419.
- [7] J. P. NOLAN , *Maximum likelihood estimation of stable parameters*. In O. E. Barndorff-Nielsen et. al., *Levy Processes: Theory and Applications*, Boston: Birkhauser, 2001, pp 379-400 .
- [8] S. RACHEV, *Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance*, North Holland, (2003).
- [9] G. SAMARODNISKY, M. TAQUU , *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall/CRC- Londo, UK, 1994.
- [10] W. R. SCHNEIDER, *Stable distributions: Fox function representation and generalization*, In: S. Albeverio, G. Casati and D. Merlini (Editors), *Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems*, SpringerVerlag, Berlin-Heidelberg (1986), pp 497-511.
- [11] S. BORAK, W. HARDLE, R. WERON, *Stable distributions*, Economic Risk. Berlin, 2005.
- [12] V. M. ZOLOTAREV, *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, (1986).